

V. HIOUX

**Démonstration analytique de quelques propriétés générales des surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16 (1877), p. 303-311

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_303\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__303_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS  
GÉNÉRALES DES SURFACES DU SECOND ORDRE ;**

PAR M. V. HIOUX,  
Professeur au lycée de Rennes.

Le troisième paragraphe du Mémoire sur l'homographie (*Aperçu historique*) est intitulé ainsi :

*Lieu géométrique du point de rencontre de trois plans tangents à une surface du second degré, assujettis à certaine condition.*

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant, qui est le deuxième du paragraphe :

*Si l'on a dans l'espace une surface du second degré et une conique, et que, par trois droites prises dans le plan de cette courbe, de manière que le pôle de chacune d'elles, par rapport à la courbe, soit le point de concours des deux autres, on mène trois plans tangents à la surface; leur point d'intersection aura pour lieu géométrique une surface du second degré, passant par la conique, et telle, que le cône qui lui serait circonscrit suivant cette courbe aurait pour sommet le pôle du plan de cette courbe, pris par rapport à la surface proposée.*

Prenons pour surface du second ordre un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués dont l'un Oz soit conjugué du plan P de la conique C. L'ellipsoïde a pour équation

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la conique C sera représentée par les deux équations

$$P = z - d = 0,$$

$$C = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0.$$

Dans le plan P, considérons trois droites  $l, l', l''$  définies par les couples d'équations

$$\begin{aligned} (l) \quad & \begin{cases} z - d = 0, \\ mx + ny + p = 0; \end{cases} \\ (l') \quad & \begin{cases} z - d = 0, \\ m'x + n'y + p' = 0; \end{cases} \\ (l'') \quad & \begin{cases} z - d = 0, \\ m''x + n''y + p'' = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin appelons  $M(\alpha, \beta, \gamma)$  le point de rencontre de trois plans tangents à l'ellipsoïde passant par  $l, l'$  et  $l''$ .

Un plan défini par le point M et la droite  $l$  a pour équation

$$m(\gamma - d)x + n(\gamma - d)y - (m\alpha + n\beta + p)z + d(m\alpha + n\beta) + p\gamma = 0.$$

Un plan tangent à l'ellipsoïde au point  $x', y', z'$  a pour équation

$$\frac{x'}{a^2}x + \frac{y'}{b^2}y + \frac{z'}{c^2}z - 1 = 0.$$

Pour que ces deux plans coïncident, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{x'}{a^2 m(\gamma - d)} &= \frac{y'}{b^2 n(\gamma - d)} = - \frac{z'}{c^2 (m\alpha + n\beta + p)} \\ &= - \frac{1}{[d(m\alpha + n\beta) + p\gamma]}; \end{aligned}$$

et, comme le point  $x', y', z'$  est dans le premier plan, on a en outre

$$m(\gamma - d)x' + n(\gamma - d)y' - (m\alpha + n\beta + p)z' + [d(m\alpha + n\beta) + p\gamma] = 0.$$

L'élimination de  $x', y'$  et  $z'$  entre ces quatre équations

donne la condition de tangence, savoir

$$\begin{aligned} & [a^2(\gamma - d)^2 + (c^2 - d^2)\alpha^2]m^2 \\ & + [b^2(\gamma - d)^2 + (c^2 - d^2)\beta^2]n^2 \\ & + (c^2 - \gamma^2)p^2 + 2(c^2 - d^2)\alpha\beta mn \\ & + 2\alpha(c^2 - d\gamma)mp + 2\beta(c^2 - d\gamma)np = 0 \end{aligned}$$

On trouvera deux relations analogues en considérant les deux plans tangents passant par  $l'$  et  $l''$ . Ces trois relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} Lm^2 + Mn^2 + Np^2 + 2Pmn + 2Qmp + 2Rnp &= 0, \\ Lm'^2 + Mn'^2 + Np'^2 + 2Pm'n' + 2Qm'p' + 2Rn'p' &= 0, \\ Lm''^2 + Mn''^2 + Np''^2 + 2Pm''n'' + 2Qm''p'' + 2Rn''p'' &= 0. \end{aligned}$$

Cela posé, puisque les trois droites  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  forment un triangle conjugué par rapport à la conique  $C$ , on a, pour une infinité de systèmes de valeurs de  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , . . . , l'identité

$$\begin{aligned} & \mu(mx + ny + p)^2 \\ & + \mu'(m'x + n'y + p')^2 + \mu''(m''x + n''y + p'')^2 \\ & = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1, \end{aligned}$$

qui conduit aux six relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu m^2 + \mu' m'^2 + \mu'' m''^2 &= A, \\ \mu n^2 + \mu' n'^2 + \mu'' n''^2 &= C, \\ \mu p^2 + \mu' p'^2 + \mu'' p''^2 &= 1, \\ \mu mn + \mu' m'n' + \mu'' m''n'' &= B, \\ \mu mp + \mu' m'p' + \mu'' m''p'' &= D, \\ \mu np + \mu' n'p' + \mu'' n''p'' &= E. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les trois équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par  $\mu$ ,  $\mu'$  et  $\mu''$ , on trouve l'équation

$$AL + CM + N + 2BP + 2DQ + 2ER = 0.$$

Cette équation est du second degré en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et représente, par conséquent, une surface du second ordre  $\Sigma$ .

En remplaçant  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  par  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ... par les quantités correspondantes, cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \Sigma = & A(c^2 - d^2)x^2 + C(c^2 - d^2)y^2 \\ & + (Aa^2 + Cb^2)(z - d)^2 \\ & + c^2 - z^2 + 2B(c^2 - d^2)xy \\ & + 2Dx(c^2 - dz) + 2Ey(c^2 - dz) = 0. \end{aligned}$$

La surface  $\Sigma$  passe par la conique donnée  $C$ , car si dans cette équation on fait  $z = d$ , on a

$$(c^2 - d^2)(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1) = 0,$$

et si le facteur  $c^2 - d^2$  est différent de zéro, on retrouve, en annulant l'autre facteur, l'équation dans son plan de la conique donnée.

Soit  $S$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = \frac{c^2}{d}$ ) le pôle du plan  $P$  par rapport à l'ellipsoïde. On trouve aisément que le plan polaire de  $S$  par rapport à  $\Sigma$  a pour équation

$$\left[ (Aa^2 + Cb^2 - 1) \frac{c^2}{d} - d(Aa^2 + Cb^2) \right] (z - d) = 0,$$

ou

$$z - d = 0.$$

Donc le plan  $P$  a même pôle par rapport à  $E$  et à  $\Sigma$ , ce qui revient à dire que le cône de sommet  $S$  est circonscrit à  $\Sigma$  suivant la conique donnée.

Les trois parties du théorème sont ainsi démontrées.

*Corollaire.* — Supposons  $d = c$ , alors le plan donné est tangent à l'ellipsoïde proposé. L'équation de  $\Sigma$  de-

vient

$$(z - c)[(Aa^2 + Cb^2 + 1)(z + c) + 2c(Dx + Ey)] = 0.$$

Le lieu se compose du plan P lui-même et d'un deuxième plan passant par le diamètre d'intersection des deux plans

$$z + c = 0, \quad Dx + Ey = 0.$$

On a donc ce théorème :

*Étant données une surface du second degré et une conique située dans un plan tangent à la surface : si par les trois côtés d'un triangle conjugué par rapport à la conique on mène trois plans tangents à la surface, leur point de rencontre décrit un plan.*

*Extension du théorème précédent.*

Appelons A la première surface donnée et concevons que par la conique C on fasse passer une deuxième surface B du second degré. Soit T le pôle du plan fixe P pris par rapport à B. Considérons un tétraèdre de sommet T conjugué par rapport à B, il sera coupé par le plan P suivant trois droites  $l, l', l''$  qui formeront un triangle conjugué par rapport à la conique C d'intersection de la surface B et du plan P. Si le tétraèdre conjugué en question tourne, en se modifiant, autour de son sommet T et que par les trois côtés  $l, l', l''$  de sa base on mène trois plans tangents à la première surface A, le point de rencontre de ces trois plans décrira une surface du second ordre  $\Sigma$ ; on a donc le théorème général du paragraphe cité, que l'on peut énoncer ainsi :

*Étant données deux surfaces du second ordre A et B, si un tétraèdre conjugué par rapport à B tourne en se modifiant, autour d'un de ses sommets T, supposé fixe, et si par les trois arêtes de la base on mène trois plans*

*tangents à la surface A, leur point de rencontre aura pour lieu géométrique une surface du second ordre  $\Sigma$ . Cette surface passera par la conique C d'intersection de la surface B et du plan polaire de T pris par rapport à B, et en outre le plan de la conique C aura même pôle S par rapport à la surface  $\Sigma$  et à la première surface donnée A.*

*Corollaire.* — On voit que la surface  $\Sigma$  et la surface B ont deux sections planes communes, ce qui signifie qu'elles sont doublement tangentes. Si le sommet fixe T du tétraèdre considéré coïncide avec le centre de la surface B, le plan P est rejeté à l'infini; l'une des sections planes communes à B et à  $\Sigma$  est donc rejetée à l'infini: ces deux surfaces sont devenues homothétiques. D'autre part, les trois arêtes du tétraèdre issues du sommet fixe T sont devenues trois diamètres conjugués de B, et comme les droites  $l$ ,  $l'$  et  $l''$  sont à l'infini, on a ce théorème :

*Si l'on mène à une surface du second ordre A trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une autre surface du second ordre B, leur point de rencontre décrit une troisième surface du second ordre  $\Sigma$ , homothétique à B.*

Cette proposition, donnée sous forme de problème au concours général en 1860, peut se démontrer directement comme il suit :

Prenons pour première surface un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués, et, puisqu'il n'y a lieu de considérer que le parallélisme des plans, faisons coïncider les centres des deux surfaces. Elles auront pour équations

$$(A) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$(B) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B_1yz + 2B'xz + 2B''xy - 1 = 0.$$

Désignons maintenant par

$$K = m x + n y + p z = 0,$$

$$K' = m' x + n' y + p' z = 0,$$

$$K'' = m'' x + n'' y + p'' z = 0$$

trois plans diamétraux de B, et soit M( $\alpha, \beta, \gamma$ ) le point de rencontre des trois plans tangents à A menés parallèlement aux premiers.

Un plan parallèle à K = 0, mené par M, a pour équation

$$m x + n y + p z - (m \alpha + n \beta + p \gamma) = 0.$$

En exprimant que ce plan et les deux autres analogues sont tangents à la surface A, on a les trois équations de condition

$$\begin{aligned} (a^2 - \alpha^2) m^2 + (b^2 - \beta^2) n^2 + (c^2 - \gamma^2) p^2 \\ - 2 \beta \gamma n p - 2 \alpha \gamma m p - 2 \alpha \beta m n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 - \alpha^2) m'^2 + (b^2 - \beta^2) n'^2 + (c^2 - \gamma^2) p'^2 \\ - 2 \beta \gamma n' p' - 2 \alpha \gamma m' p' - 2 \alpha \beta m' n' = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 - \alpha^2) m''^2 + (b^2 - \beta^2) n''^2 + (c^2 - \gamma^2) p''^2 \\ - 2 \beta \gamma n'' p'' - 2 \alpha \gamma m'' p'' - 2 \alpha \beta m'' n'' = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque K, K' et K'' sont, par hypothèse, trois plans diamétraux conjugués de B, on a l'identité

$$\begin{aligned} \mu K^2 + \mu' K'^2 + \mu'' K''^2 - 1 \\ = A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' y z + 2 B'' x y - 1, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les six relations

$$\begin{aligned} \mu m^2 + \mu' m'^2 + \mu'' m''^2 = A, \quad \mu n p + \mu' n' p' + \mu'' n'' p'' = B, \\ \gamma n^2 + \mu' n'^2 + \mu'' n''^2 = A', \quad \mu m p + \mu' m' p' + \mu'' m'' p'' = B', \\ \mu p^2 + \mu' p'^2 + \mu'' p''^2 = A'', \quad \mu m n + \mu' m' n' + \mu'' m'' n'' = B''. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes

respectivement multipliées par  $\mu$ ,  $\mu'$  et  $\mu''$ , et nous obtenons

$$\begin{aligned} & A a^2 + A' b^2 + A'' c^2 \\ &= A \alpha^2 + A' \beta^2 + A'' \gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta. \end{aligned}$$

Le lieu du point M est donc une surface du second ordre homothétique à la surface B.

*Cas de deux coniques.* — Si l'on substitue aux surfaces A et B deux coniques que nous désignerons aussi par A et B, on aura des théorèmes analogues aux précédents.

Supposons d'abord que les deux coniques aient leurs plans parallèles et faisons  $c = 0$  dans l'équation  $\Sigma$ , le lieu sera représenté par l'équation

$$\begin{aligned} & [A d^2 x^2 + C d^2 y^2 + z^2 + 2B d^2 xy + 2D dxz + 2E dyz] \\ & - (A a^2 + C b^2)(z - d)^2 = 0. \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est le premier membre de l'équation d'un cône passant par la conique B et dont le sommet est au centre de la conique A. Le lieu est donc une surface du second ordre inscrite dans ce cône suivant la conique B.

Supposons maintenant que les deux coniques n'aient pas leurs plans parallèles; prenons pour axe des  $y$  une droite menée par le centre de A parallèlement à l'intersection des deux plans, pour axe des  $x$  la direction conjuguée de cette droite dans le plan de A, et pour axe des  $z$  la direction conjuguée de la même droite dans le plan de la conique B. Les deux coniques seront définies par les deux couples d'équations

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \begin{cases} z = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \end{cases} \\ \text{(B)} \quad & \begin{cases} z + d = 0, \\ A y^2 + C z^2 + 2D y + 2E z + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En appliquant le même procédé de calcul que pour deux surfaces, les droites  $l, l', l''$  s'appliquent à la conique B : on trouve pour lieu une surface du second ordre passant par B et inscrite suivant cette courbe dans un cône ayant pour sommet un point S, pôle de la droite d'intersection des deux plans de A et de B, pris par rapport à A. On trouve, en effet, pour l'équation du lieu

$$A b^2 (x + d)^2 + (a^2 - d^2) (A y^2 + C z^2) + a^2 - x^2 + 2(a^2 + dx) (Dy + Ez) = 0.$$

Cette surface  $\Sigma$  passe par la conique B; le plan polaire du point S  $(y = 0, z = 0, x = -\frac{a^2}{d})$ , pris par rapport à  $\Sigma$ , a pour équation

$$(x + d) \left[ A b^2 d - \frac{a^2}{d} (A b^2 - 1) \right] = 0 \quad \text{ou} \quad x + d = 0.$$

On a donc ce théorème :

*Étant données dans l'espace deux coniques quelconques A et B, etc.*

Si l'on suppose  $d = -a$ , la surface  $\Sigma$  est un système de deux plans dont l'un est celui de la conique B. Si l'on suppose  $d = 0$ , la conique B est une conique diamétrale de  $\Sigma$ , dont l'équation est alors

$$(A b^2 - 1) x^2 + a^2 (A y^2 + C z^2 + 2 D y + 2 E z + 1) = 0.$$