NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique (1876)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 266-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__266_1>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1876).

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun de ces cercles, on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact du cercle variable du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.

Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle, on aura à la rendre rationnelle.

En second lieu, on exprimera en fonction du rayon du cercle les coordonnées du point d'incidence, en s'attachant à spécifier les solutions réelles distinctes.

Soit

$$x^2 - y^2 = a^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Les équations de la normale au point (x', y') et de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale sont respectivement

$$y'x + x'y = 2x'y',$$
$$x'x - y'y = 0;$$

d'où l'on tire pour les coordonnées de leur point d'intersection, point de contact de la normale avec la circonférence tangente concentrique à l'hyperbole,

$$x_1 = \frac{2x'y'^2}{x'^2 + y'^2},$$
$$y_1 = \frac{2x'^2y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Le rayon du cercle, ou la distance du centre à la normale, est

$$\frac{2x'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = r.$$

En appelant x et y les coordonnées du milieu de la distance du point de contact de la normale avec le cercle à son point d'incidence sur l'hyperbole, on a

$$2x = x' + \frac{2x'y'^2}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'^3 + 3x'y'^2}{x'^2 + y'^2},$$
$$2y = y' + \frac{2x'^2y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{3x'^2y' + y'^3}{x'^2 + y'^2}.$$

En combinant ces équations par addition et soustraction, on obtient le système équivalent

$$2(x+y) = \frac{(x'+y')^3}{x'^2+y'^2},$$

$$2(x-y) = \frac{(x'-y')^3}{x'^2+y'^2};$$

ou, en posant, pour abréger, $x'+y'=\alpha$, $x'-y'=\beta$,

$$x+y = \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$x-y = \frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\alpha\beta = a^2.$$

On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant α et β entre ces trois équations.

En multipliant membre à membre les deux premières, et ayant égard à la troisième, on a

$$x^2-y^2 = \frac{\alpha^3\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = \frac{a^6}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{a^3}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

équation qui peut remplacer la troisième. Les deux premières donnent ensuite

$$\alpha^2 = a^2\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{(x-y)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\beta^2 = a^2\frac{(x-y)^{\frac{1}{3}}}{(x+y)^{\frac{1}{3}}};$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2 = a^2\left[\frac{(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}}\right].$$

En égalant les deux valeurs de $\alpha^2+\beta^2$, et multipliant par $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ pour chasser les dénominateurs, il vient

$$(1)\qquad (x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}\left[(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}\right]=a,$$

équation du lieu demandé, qu'il faut rendre rationnelle.

En élevant les deux membres au cube, il vient

$$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\left\{2(x^2+y^2)+3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\left[(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}=a^3,$$

et, en remplacant $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$ par sa valeur $\dfrac{a}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}}$,

$$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\left[2(x^2+y^2)+3a(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]=a^3,$$

ou

$$(2)\qquad 2(x^2+y^2)(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}=a^3-3a(x^2-y^2),$$

et, en élevant au carré et transportant tous les termes dans le premier membre,

$$(3)\quad 4(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)-9a^2(x^2-y^2)^2-6a^4(x^2-y^2)-a^6=0,$$

équation du sixième degré, qui, ne contenant que les puissances paires de x et de y, est réductible au troisième. Mais il faut remarquer que cette équation est plus générale que l'équation (2).

En effet, dans la relation

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{a^3}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ est nécessairement positif, et, par suite, il en est de même de $(x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}$ dans l'équation (1), et de $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation (2). Or l'équation (3) comprend également le cas où $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ serait négatif.

En résolvant l'équation (3) par rapport à y^2, il ne faudra donc prendre que les valeurs pour lesquelles on a

$$a^3 - 3a(x^2 - y^2) > 0$$

ou

$$y^2 > x^2 - \frac{a^2}{3}.$$

D'ailleurs l'équation (3) montre que l'on doit avoir

$$y^2 < x^2.$$

On voit immédiatement que la courbe, symétrique par rapport aux axes de l'hyperbole, a deux sommets sur l'axe des x aux points $x = \pm \frac{a}{2}$, qu'elle est comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes, dont elle s'approche indéfiniment, ce qui donne une idée assez nette de sa forme.

On peut aussi les construire au moyen de l'équation (2) transformée en coordonnées polaires, qui devient

$$2r^3\sqrt{\cos 2\theta} + 3ar^2\cos 2\theta - a^3 = 0.$$

On a vu que le rayon du cercle tangent à la normale au point (x', y') de l'hyperbole est

$$\frac{2x'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = r.$$

On a d'ailleurs

$$x'^2 - y'^2 = a^2;$$

d'où l'on tire, en éliminant y'^2,

$$4x'^4 - (2r^2 + 4a^2)x'^2 + a^2r^2 = 0,$$

$$x'^2 = \frac{r^2 + 2a^2 \pm \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}$$

et

$$y'^2 = \frac{r^2 - 2a^2 \pm \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}.$$

Les signes inférieurs, donnant une valeur négative pour y'^2, doivent être rejetés; on a donc, en se bornant aux solutions réelles,

$$x'^2 = \frac{r^2 + 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4},$$

$$y'^2 = \frac{r^2 - 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}$$

ou

$$x' = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}},$$

$$y' = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}.$$

On voit que, pour chaque valeur de r, il existe quatre points d'incidence de la normale, symétriques par rapport aux deux axes de l'hyperbole.

Ce résultat était évident *a priori*; car, le pied de la normale se déplaçant sur une branche de la courbe depuis le sommet jusqu'à l'infini, la distance du centre à la normale, ou le rayon du cercle tangent à cette normale, croît de zéro à l'infini, et, par suite de la symétrie par rapport aux deux axes, chaque cercle est touché par quatre normales à l'hyperbole, sauf le cercle de rayon nul.

Nota. — Autres solutions de MM. Tourettes; Gambey; A. Desboves, professeur de Mathématiques au collége de Pamiers; Édouard Guillet, soldat au 38e d'infanterie; Louis Goulin, élève au lycée Corneille à Rouen.