LEZ

Questions proposées par M. Bourguet

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 260-263
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__260_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. BOURGUET

(voir 2e serie, t. XV, p. 281);

SOLUTIONS DE M. LEZ.

Représentant par m et n les deux demi-cordes normales et perpendiculaires d'une conique; p^2, q^2 les produits des rayons vecteurs des pieds de ces normales; r, s les normales arrêtées à l'axe focal; r', s' les normales arrêtées à l'autre axe; t, u les rayons de courbure, démontrer les relations suivantes :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2},$$

$$\frac{1}{mab}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{pq^2},$$

$$\frac{1}{nab} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{p^2 q},$$

$$\frac{p}{m} + \frac{q}{n} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

$$mp = nq = \frac{p^2 q^2}{ab}, \quad \frac{p}{t} + \frac{q}{u} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \quad mn = tu;$$

$$mr = ns, \quad mr' = ns', \quad \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'},$$

$$\frac{r}{m} + \frac{s}{n} = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{r'}{m} + \frac{s'}{n} = 1 + \frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{r+r'}{m} + \frac{s+s'}{n} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2.$$

(BOURGUET.)

Au point M (μ, ν) d'une ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, la normale a pour équation $y - \nu = \frac{a^2 \nu}{b^2 \mu}(x - \mu)$; elle rencontre la courbe en M′ ayant pour coordonnées

$$x' = \frac{[(a^2 - \mu^2)(a^2 - b^2)^2 - a^2 b^4]\mu}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2},$$

$$y' = \frac{[\mu^2 (a^2 - b^2)^2 - a^6]\nu}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2}.$$

Par suite, on trouve que, en fonction de l'abscisse μ, la corde normale MM′ égale

$$(1) \qquad 2m = \frac{2b(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}.$$

La tangente au même point M a pour équation

$$(y - \nu) = -\frac{b^2 \mu}{a^2 \nu}(x - \mu);$$

elle coupe en deux points P, P′ le cercle concentrique $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse. Ces points ont pour coordonnées

$$x = \frac{a^2 b^4 \mu \pm a^2 \nu \sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2}}{a^4 \nu^2 + b^4 \mu^2},$$

$$y = \frac{a^4 b^2 \nu \mp b^2 \mu \sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2}}{a^4 \nu^2 + b^4 \mu^2}.$$

La tangente à l'ellipse, menée par le point P, peut donc être représentée par

$$y - \frac{b^2(a^4\nu - \mu\sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2}}{a^4\nu^2 + b^4\mu^2} = \frac{a^2\nu}{a^2\mu}\left(x - \frac{a^2(b^4\mu + \nu\sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2}}{a^4\nu^2 + b^6\mu^2}\right),$$

ou plutôt par

$$b^2 \mu y = a^2 \nu x - \sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2};$$

elle touche la courbe au point N, dont l'abscisse γ est

$$\frac{a^4 \nu}{\sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2}} = a^3 \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2}},$$

en fonction de μ.

A l'aide de la formule (1), on a

$$\mathrm{NN}' = 2n = \frac{2(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant on sait que le produit des rayons vecteurs

$$\mathrm{FM.F'M} = a^2 - c^2\mu^2 = \frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^2} = p^2;$$

de même

$$\mathrm{FN.F'N} = a^2 - c^2\gamma^2 = \frac{a^2 b^2(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2} = q^2.$$

Quant aux normales arrêtées à l'axe focal, elles sont

$$\text{en M,} \quad \frac{b}{a^2}(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{1}{2}} = r,$$

$$\text{en N,} \quad b^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = s;$$

les mêmes normales arrêtées à l'autre axe ont pour longueurs

$$\frac{1}{b}\left(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2\right)^{\frac{1}{2}} = r',$$

$$a^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = s'.$$

Enfin les rayons de courbure sont

$$\text{en M,}\quad \frac{(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} = t,$$

$$\text{en N,}\quad a^2 b^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} = u.$$

Cela posé, on peut écrire de suite, en fonction de p et de q,

$$m = \frac{pq^2}{ab},\qquad n = \frac{p^2q}{ab},$$

$$r = \frac{pb}{a},\qquad s = \frac{qb}{a},$$

$$r' = \frac{pa}{b},\qquad s' = \frac{qa}{b},$$

$$t = \frac{p^3}{ab},\qquad u = \frac{q^3}{ab}.$$

Remarquant que $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, on retrouve facilement les relations énoncées plus haut, en combinant les huit expressions ci-dessus. Pour l'hyperbole, on obtient les mêmes résultats; du reste, il suffit de faire $b^2 = -b^2$.