BOURGUET

Question de licence (1872)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 258-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__258_1>

FACULTÉ DE PARIS.

QUESTION DE LICENCE (1872).

SOLUTION DE M. BOURGUET.

Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical, et dirigé de haut en bas, et une poulie homogène de masse et de rayon connus, située dans un plan méridien du cône et tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, un fil flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des bras du fil passe dans une ouverture infiniment petite, pratiquée au sommet du cône, et à son extrémité est attaché un point pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend librement suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système, en *supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale, et celle du point m′ nulle. On néglige le poids du fil.*

Je représente par

m la masse du corps qui glisse le long du cône ;
l sa distance au sommet ;
x la quantité dont il est descendu, à un moment quelconque ;
u sa vitesse horizontale ;
m' la masse de l'autre corps ;
μ la masse de la poulie.

Je suppose le centre de gravité de la poulie sur son axe.

Le principe des forces vives appliqué au système donne

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(m + m' + \frac{\mu}{2}\right) \frac{dx^2}{dt^2} + m(u^2 - u_0^2) \\ &\quad = 2gx(m\cos\alpha - m'), \end{aligned} \right.$$

et le principe des aires, appliqué au point m, donne

$$(2) \qquad (l + x)u = lu_0.$$

L'équation (1) devient, par substitution,

$$\left(m + m' + \frac{\mu}{2}\right) \frac{dx^2}{dt^2}$$
$$= \frac{x}{(l+x)^2}\left[2g(m\cos\alpha - m')(l+x)^2 + m(2l+x)u_0^2\right].$$

1° $m\cos\alpha - m' \geqq 0$.

x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, le mobile m s'éloigne indéfiniment du sommet du cône.

2° $m\cos\alpha - m' < 0$.

$2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 > 0$. Le trinôme du second degré a une racine positive x_0 et une racine négative. x varie de zéro à x_0 : le mouvement est oscillatoire, dans le sens vertical.

3° $2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 = 0$.

$x = 0$, le mobile m décrit un parallèle.

4° $2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 < 0$.

Le trinôme devient successivement négatif, positif, négatif, pour x égal à zéro, $-l$, $-2l$; il admet donc une racine négative, $-x_0 > -l$; x varie entre zéro et $-x_0$: le mouvement est oscillatoire.

Dans aucun cas m ne peut remonter jusqu'au sommet du cône.

Il est curieux de remarquer que la masse m, quelque petite qu'elle soit, et quelle que soit sa vitesse initiale, pourra faire remonter le mobile m' quelque grand qu'il soit : c'est comme pour le levier.

Pour une valeur quelconque de x, t s'obtient par une quadrature.

L'équation de la courbe sur la surface du cône, se ramène aussi à une quadrature.