

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 230-239

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__230_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1177

(voir 2^e série, t. XIV, p. 288)

Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(1) \quad 1 + x + x^2 + x^3 = y^2.$$

(BROCARD.)

Note du Rédacteur. — Deux solutions fondées sur des calculs différents m'ont été adressées; elles conduisent, l'une et l'autre, aux valeurs 1, 7 pour l'inconnue x ; mais, dans aucune des deux, il n'est rigoureusement démontré que x n'admet pas d'autres valeurs entières et positives, ce qui reste à faire voir.

Afin de trouver toutes les valeurs entières de x , tant négatives que positives, je supposerai, successivement, $x < 0$, $= 0$, > 0 .

Lorsque x est négatif, on a, en remplaçant x par $-z$,

$$1 - z + z^2 - z^3 = y^2, \quad (1 - z)(1 + z^2) = y^2,$$

$$z = 1, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad y = 0.$$

Si $x = 0$, $y = \pm 1$.

Les hypothèses $x < 0$, $= 0$ ne donnant rien de plus, j'admettrai, dans ce qui va suivre, l'inégalité $x > 0$.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x + 1)(x^2 + 1) = y^2.$$

Les nombres entiers que $(x + 1)$ et $(x^2 + 1)$ représentent ont nécessairement un diviseur commun autre

que l'unité; car, s'ils étaient premiers entre eux, $x^2 + 1$ serait un carré, ce qui est évidemment impossible.

Ce diviseur commun est 2; cela résulte de l'identité $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2$.

Il s'ensuit que chacun des deux nombres $(x + 1)$, $(x^2 + 1)$ est le double d'un carré, de sorte qu'on a des égalités de la forme

$$(2) \quad x + 1 = 2m^2,$$

$$(3) \quad x^2 + 1 = 2n^2.$$

L'élimination de x entre ces deux égalités conduit à l'égalité suivante :

$$(4) \quad m^4 + (m^2 - 1)^2 = n^2,$$

qui montre que n est un nombre impair, premier avec m et avec $m^2 - 1$.

Cela posé, je distingue deux cas, suivant que m est impair ou pair.

1° m impair. — L'équation (4) revient à

$$(5) \quad [n + (m^2 - 1)][n - (m^2 - 1)] = m^4.$$

Les nombres impairs $n + (m^2 - 1)$, $n - (m^2 - 1)$ sont premiers entre eux, puisque leur somme $2n$ et leur différence $2(m^2 - 1)$ n'ont pas d'autre diviseur commun que 2; donc chacun de ces deux nombres est égal à un bicarré. Soient

$$(6) \quad n + (m^2 - 1) = p^4, \quad n - (m^2 - 1) = q^4;$$

d'où

$$p^4 q^4 = m^4, \quad p^2 q^2 = m^2.$$

Des deux équations (6) on tire

$$p^4 - q^4 = 2(m^2 - 1),$$

ou, à cause de $p^2 q^2 = m^2$,

$$p^4 - q^4 = 2(p^2 q^2 - 1), \quad q^4 + 2p^2 q^2 - (p^4 + 2) = 0, \\ q^2 = -p^2 + \sqrt{2(p^4 + 1)}.$$

On voit par cette dernière équation que $p^4 + 1$ est le double d'un carré, ce qui exige que $p^2 = 1$ (*). De là,

$$q^2 = -1 + \sqrt{4} = 1, \quad m^2 = 1, \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = \pm 2.$$

Ainsi, lorsque m est impair, les solutions de l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ sont, en nombres entiers, $x = 1$, $y = +2$, et $x = 1$, $y = -2$.

2° m pair. — Dans l'équation

$$(5) \quad [n + (m^2 - 1)][n - (m^2 - 1)] = m^4,$$

les facteurs $n + (m^2 - 1)$, $n - (m^2 - 1)$ représentent, actuellement, des nombres pairs; et, en posant

$$n + (m^2 - 1) = 2\alpha, \quad n - (m^2 - 1) = 2\beta, \quad \text{et} \quad m = 2r,$$

il vient

$$n = \alpha + \beta, \quad m^2 - 1 = \alpha - \beta, \quad 4\alpha\beta = m^4 = 16r^4, \quad \alpha\beta = 4r^4.$$

n et $m^2 - 1$ étant premiers entre eux, il en est de même de α , β ; par conséquent, en vertu de l'égalité $\alpha\beta = 4r^4$, l'un des deux nombres α , β est le quadruple d'un bicarré, et l'autre un bicarré, c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha = 4p^4, \quad \beta = q^4 \quad \text{ou} \quad \alpha = p^4, \quad \beta = 4q^4.$$

Mais les égalités $\alpha = p^4$, $\beta = 4q^4$ sont inadmissibles, parce qu'il en résulterait $m^2 - 1 = p^4 - 4q^4$, égalité absurde en ce que le premier membre est un multiple de 4 diminué de 1, et le second un multiple de 4

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. II, p. 4 et 5, édition de 1830 : L'équation $x^4 + y^4 = 2p^4$ est impossible, hors le cas $x = y$.

augmenté de 1. Il faut donc prendre

$$\alpha = 4p^4, \quad \beta = q^4.$$

Il s'ensuit

$$m^2 - 1 = 4p^4 - q^4,$$

et

$$4p^4 q^4 = 4r^4, \quad 4p^2 q^2 = 4r^2 = m^2;$$

d'où

$$4p^2 q^2 - 1 = 4p^4 - q^4, \quad q^4 + 4p^2 q^2 - (4p^4 + 1) = 0,$$

$$q^2 = -2p^2 + \sqrt{8p^4 + 1}.$$

$8p^4 + 1$ devant être égal au carré d'un nombre impair, on a

$$8p^4 + 1 = (2k + 1)^2,$$

et, par suite,

$$\frac{k(k+1)}{2} = p^4,$$

équation qui donne

$$p^2 = 1, \quad \text{ou} \quad p = 0 \text{ (*).}$$

Pour $p^2 = 1$, $q^2 = -2 + \sqrt{9} = 1$,

$$m^2 = 4, \quad x = 7, \quad y = \pm 20,$$

et pour $p^2 = 0$, $q^2 = 1$,

$$m^2 = 0, \quad x = -1, \quad y = 0.$$

Ainsi, lorsque m est pair, les solutions de l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ sont, en nombres entiers,

$$x = 7, \quad y = \pm 20 \quad \text{et} \quad x = -1, \quad y = 0;$$

cette dernière solution a déjà été mentionnée.

De tout ce qui précède, nous concluons que l'équation

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. II, p. 7, édition de 1830 : *Aucun nombre triangulaire $\frac{1}{2}x(x+1)$, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré.*

Ajoutant et divisant par n ,

$$GZ \simeq GH \cos \omega t + GK \sin \omega t,$$

équipollence d'une ellipse du centre G , ce qui démontre le théorème énoncé.

Ce théorème subsisterait évidemment si, au lieu de cercles, les mobiles parcouraient des ellipses avec des vitesses aréolaires constantes, en décrivant dans le même temps le circuit complet de chaque courbe.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. H.-J. Krantz, capitaine d'artillerie néerlandaise, à Bréda; Moret-Blanc; Brunot, élève en spéciales au lycée de Dijon; Joseph Bardelli, à Milan; P. Worms de Romilly, à Limoges; Conette, à Tours; Barbarin, élève à l'École Normale supérieure.

Question 1221

(voir même tome, p. 144);

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

THÉORÈME. — *Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD et un point O, on peut faire passer par ce point trois droites qui rencontrent respectivement les arêtes*

AD, BC, en des points a, a' ;

BD, CA, b, b' ;

CD, AB, c, c' .

Si l'on construit sur ces arêtes les points conjugués harmoniques

α, α' ,

β, β' ,

γ, γ' ,

les six points $b, c, b', c', \alpha, \alpha'$, seront dans un même

plan, et il en sera de même des six points $c, a, c', a', \beta, \beta'$, et de $a, b, a', b', \gamma, \gamma'$. (H. SCHRÖTER.)

En effet, si l'on considère le plan P, conjugué harmonique du plan $bb'aa'$, par rapport aux deux plans $bb'DA, bb'CB$, on voit qu'il coupe les arêtes AB et CD en α et α' . Donc, les quatre points b, b', α, α' sont dans un même plan P.

De même, les quatre points c, c', α, α' sont dans un même plan P'. Mais les plans P, P' ayant trois points communs α, α', O coïncident : donc les six points $b, c, b', c', \alpha, \alpha'$ sont dans un même plan (*).

Note. — Autres solutions de MM. J. Pisani et Berthomieu.

Question 1223

(voir même tome, p. 144);

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Étant données deux hyperboles équilatères, trois de leurs points d'intersection et les deux points symétriques du quatrième, par rapport aux centres des deux hyperboles, sont situés sur un même cercle.

(PELLET.)

En général, une conique à centre et une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique, se coupent en quatre points tels, que par trois d'entre eux et le point diamétralement opposé au quatrième on peut faire passer un cercle.

En effet, soient une conique à centre rapportée à ses axes,

$$(1) \quad Ax^2 - A'y^2 = 1,$$

(*) Il est clair que cette démonstration s'applique à chacun des deux autres systèmes $c, a, c', a', \beta, \beta'$ et $a, b, a', b', \gamma, \gamma'$.

et une hyperbole équilatère

$$(2) \quad xy + mx + ny + p = 0.$$

L'équation qui représente un couple de sécantes communes est de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + \lambda(xy + mx + ny + p) - 1 = 0.$$

Soient m et m' les coefficients angulaires de ces cordes, on a

$$mm' = -\frac{A}{A'}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par m'' le coefficient angulaire de la corde de la conique (1) qui passe par une des extrémités de celle des deux sécantes dont le coefficient angulaire est m , et par le point diamétralement opposé à l'autre extrémité, on a

$$mm'' = -\frac{A}{A'},$$

d'où

$$m' = -m'';$$

donc les cordes dont les coefficients angulaires sont m' et m'' sont également inclinées sur les axes de la conique (1), et par conséquent leurs extrémités appartiennent à une même circonférence.

Cela posé, soient une hyperbole équilatère rapportée à ses axes

$$(3) \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

et une seconde hyperbole équilatère

$$(4) \quad x^2 - y^2 + 2Bxy + 2lx + 2l'y + D = 0;$$

Par les quatre points d'intersection de ces deux courbes on peut faire passer une hyperbole équilatère dont l'équation est

$$(5) \quad 2Bxy + 2lx + 2l'y + D + a^2 = 0.$$

et, d'après ce qui précède, trois des points d'intersection des coniques (3) et (5), et le symétrique du quatrième par rapport à l'origine, sont sur un même cercle.

La conclusion eût été la même si l'on avait pris pour axes des coordonnées les axes de la conique (4). Or le cercle passant par trois des points d'intersection des coniques (2) et (4) et le symétrique du quatrième par rapport au centre de la conique (4) ne diffère pas du premier, puisque ces deux cercles ont trois points communs. La proposition est donc démontrée.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. H. DESSOUDEIX,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux.

Soient A, B, C trois des points d'intersection, le quatrième sera le point de concours M des hauteurs du triangle ABC; car on sait qu'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de rencontre de ses hauteurs. Je considère le cercle circonscrit au triangle ABC, et je dis que les symétriques de M par rapport aux centres des deux hyperboles se trouvent sur ce cercle. En effet, on sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points du triangle. Il faut donc démontrer que, si l'on joint le point M à un point quelconque R du cercle des neuf points, et que l'on prenne le symétrique R' de M, ce point R' se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour cela, je considère le point de concours O des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés : ce point est le centre du cercle ABC; en outre, le milieu I de OM est le

centre du cercle des neuf points qui passe par le point P, pied de la hauteur AM du triangle. Le symétrique M' de M par rapport à BC appartient au cercle ABC, et l'on a

$$\frac{MI}{MO} = \frac{MP}{MM'} = \frac{1}{2};$$

donc le point M est le centre de similitude des deux cercles, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$ (*). Il s'ensuit que les symétriques du point M, par rapport au cercle des neuf points, se trouvent sur le cercle ABC.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Barthe, Berthomieu, Cauboue, élèves au lycée de Bordeaux; Cambier; L. B., à Vendôme; Louis Thuillier, du lycée d'Amiens; J. Pisani.