NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Question proposée au concours d'admission à l'École centrale. 2e session. Octobre 1876

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 224-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__224_1>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE CENTRALE.

2e SESSION. — OCTOBRE 1876.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

On donne dans un plan un angle ROR′, *un point* A *sur la bissectrice* Ox *de cet angle, et deux points* B, B′ *placés symétriquement par rapport à* Ox.

On mène par le point A *une droite quelconque qui rencontre* OR *en* C *et* OR′ *en* C′; *on mène les droites* BC, B′C′, *ces droites se coupent en un point* M.

On demande le lieu décrit par le point M, *quand la droite* CAC′ *tourne autour du point* A.

On discutera le lieu en laissant fixes les droites OR, OR′ *et le point* A, *et en déplaçant le point* B, *et, par suite, le point* B′.

On indiquera dans quelles régions du plan doit être placé le point B *pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.*

Prenons pour axes la droite Ox et sa perpendiculaire menée par le point O.

Soient OA $= a$, α et β les coordonnées du point B ;

$$y = mx,$$
$$y = -mx$$

les équations des droites OR, OR′, et

$$y = m'(x - a)$$

celle d'une droite menée par A ; on en déduit

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m'a}{m' - m} \\ y_1 &= \frac{mm'a}{m' - m} \end{aligned}\right\} \text{ coordonnées du point C;}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{m'a}{m' + m} \\ y_2 &= \frac{-mm'a}{m' + m} \end{aligned}\right\} \text{ coordonnées du point C'.}$$

La droite BC a pour équation

$$(y_1 - \beta)x + (\alpha - x_1)y + \beta x_1 - \alpha y_1 = 0,$$

ou, en remplaçant x_1, y_1 par leurs valeurs, et mettant m' en facteur,

$$[(ma - \beta)x + (\alpha - a)y + (a\beta - ma\alpha)]m' = (m\alpha y - m\beta x).$$

L'équation de B′C′ s'en déduit en changeant β en $-\beta$ et m en $-m$

$$[-(ma - \beta)x + (\alpha - a)y - (a\beta - ma\alpha)]m' = -(m\alpha y + m\beta x).$$

Si l'on élimine m' en multipliant en croix, on obtient l'équation du lieu du point M

$$\beta(ma - \beta)x^2 + \alpha(\alpha - a)y^2 + a\beta(\beta - m\alpha)x = 0.$$

C'est une conique ayant un axe coïncidant avec Ox.

Cette conique sera une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, selon que le produit

$$\alpha\beta(ma - \beta)(\alpha - a)$$

sera positif, négatif, ou nul.

Par le point A menons une perpendiculaire à Ox, qui rencontre OR en D, puis par D une parallèle à Ox, qui rencontre Oy en E.

On reconnaît sans peine que le lieu est une ellipse si le point B est dans l'une des bandes extérieures formées par le prolongement de deux côtés opposés du rectangle OEDA; une hyperbole s'il est dans l'intérieur du rectangle ou dans l'un des angles opposés par le sommet à ceux du rectangle; une parabole s'il est sur une des droites Oy, AD, DE indéfiniment prolongées.

Si le point B est placé sur Ox, la condition précédente semble indiquer une parabole; mais, en remontant aux équations des droites BC, B'C' qui, pour $\beta = 0$, deviennent

$$[ma(x - \alpha) + (\alpha - a)y]m' = ma y,$$
$$[ma(x - \alpha) - (\alpha - a)y]m' = ma y,$$

on voit qu'elles sont satisfaites par $x = \alpha$, $y = 0$, quel que soit m' : le lieu se réduit au point B, ce qui est d'ailleurs évident *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Brunot, élève au lycée de Dijon; Jules Freson et Georges Lambiotte, élèves de l'École des Mines de Liége.

M. Brunot a donné des solutions géométrique et analytique.