MORET-BLANC

Concours d'admission à l'École normale supérieure (année 1876)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 218-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__218_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1876)

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 470);

PAR M. MORET-BLANC.

On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY *et telles que la droite* PQ *qui joint leurs points de contact* P, Q *avec les deux droites passe par un point fixe donné* A.

1° *On demande le lieu du point d'intersection de la normale en* P *à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en* Q.

2° *On demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan.*

3° *On demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné. On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45 degrés, et où le point donné* A *est sur la droite* OX.

Je prends pour axes de coordonnées les droites

OX, OY dans le sens où les coordonnées du point A sont positives.

Soient a et b ces coordonnées, et $OP = \alpha$, $OQ = \beta$.

L'équation générale des paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé est

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)^2 - 2\frac{x}{\alpha} - 2\frac{y}{\beta} + 1 = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 1,$$

qui exprime que la droite PQ passe par le point A.

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0$$

est l'équation du diamètre passant par l'origine : le coefficient angulaire des diamètres est donc $\frac{\beta}{\alpha}$.

1° La normale en P à l'axe des paraboles et le diamètre de la même courbe passant en Q ont respectivement pour équations

$$x = \alpha,$$

$$y - \beta = \frac{\beta}{\alpha} x.$$

On aura l'équation du lieu de leurs points d'intersection en éliminant α et β entre ces deux dernières équations et l'équation (2), ce qui donne

$$(3) \qquad xy - 2bx - ay = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole équilatère passant par le point O et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OX, OY.

Les coordonnées du centre sont

$$x = a, \quad y = 2b.$$

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation devient

$$xy = 2ab.$$

2° Si x et y sont les coordonnées d'un point donné du plan, les équations (1) et (2) déterminent les paramètres α, β relatifs aux paraboles qui passent par ce point.

De l'équation (2) on tire

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b\alpha}.$$

En reportant cette valeur dans l'équation (1), et multipliant par $b^2\alpha^2$ pour chasser les dénominateurs, il vient

$$(y - b)^2\alpha^2 - 2[y(bx + ay) + b(bx - ay)]\alpha + (bx + ay)^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{y(bx + ay) + b(bx - ay) \pm 2b\sqrt{xy(bx + ay - ab)}}{(y - b)^2}.$$

Soient B et C les projections du point A sur OX et OY;

$$bx + ay - ab = 0$$

est l'équation de la droite BC.

Cela posé, on aura deux valeurs réelles de α, et par suite deux paraboles réelles passant par le point donné, si ce point est situé: 1° dans l'angle des coordonnées positives du côté opposé à l'origine par rapport à BC; 2° dans l'un des angles adjacents, du même côté de BC que le point O.

Il n'y aura qu'une valeur de α, et par suite qu'une parabole, si le point donné est situé sur l'une des droites OX, OY, BC, et la parabole y sera tangente à cette droite;

$$xy(ax + by - ab) = 0$$

est, en effet, l'équation de l'enveloppe des paraboles, qui se compose par conséquent des trois côtés du triangle OBC.

Si le point donné est dans une autre région du plan, les valeurs de α sont imaginaires, et il n'y a pas de parabole réelle passant par ce point.

Remarque. — Toutes les paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé étant inscrites au triangle OBC, le lieu de leurs foyers est la circonférence circonscrite à ce triangle.

3° Si l'on pose $\frac{\beta}{\alpha} = m$, d'où, en vertu de l'équation (2),

$$\alpha = \frac{am + b}{m}, \quad \beta = am + b,$$

l'équation (1) devient, en multipliant par $(am + b)^2$,

$$(mx - y)^2 - 2(am + b)(mx + y) + (am + b)^2 = 0.$$

L'équation d'une autre parabole dont le coefficient angulaire des diamètres est m' sera

$$(m'x - y)^2 - 2(am' + b)(m'x + y) + (am' + b)^2 = 0.$$

En ordonnant les deux équations par rapport à m et m', on a

$$(x - a)^2 m^2 - 2(xy + bx + ay - ab)m + (y - b)^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 m'^2 - 2(xy + bx + ay - ab)m' + (y - b)^2 = 0.$$

Si μ est la tangente de l'angle donné que doivent faire les axes des deux paraboles, on a

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \mu.$$

Or, m et m' étant les racines d'une même équation du second degré de la forme $Am^2 - 2Bm + C = 0$, on a

$$m - m' = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad 1 + mm' = \frac{A + C}{A}:$$

donc

$$\sqrt{B^2 - AC} = \mu(A + C) \quad \text{ou} \quad B^2 - AC = \mu^2(A + C)^2,$$

c'est-à-dire

$$(xy + bx + ay - ab)^2 - (x - a)^2(y - b)^2$$
$$= \mu^2[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2$$

et, en réduisant,

$$(4) \quad 4xy(bx + ay - ab) = \mu^2[(a - x)^2 + (y - b)^2]^2.$$

Le lieu des points d'intersection de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées, et dont les axes font entre eux un angle constant dont la tangente est μ, est donc une courbe du quatrième ordre jouissant de cette propriété que *le produit des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle* OBC, *multiplié par* OA, *est à la quatrième puissance de la distance de ce point au point* A *dans un rapport constant* $\frac{\mu^2}{4}$.

Si l'angle des axes est de 45 degrés et que le point A soit sur OX, on a $\mu = 1$, $b = 0$.

L'équation du lieu se réduit à

$$4axy^2 = [(x - a)^2 + y^2]^2$$

ou

$$y^2 \mp 2\sqrt{ax}\,y + (x - a)^2 = 0;$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{3ax - x^2 - a^2} = \pm\sqrt{ax} \pm Y,$$

en posant

$$Y = \sqrt{3ax - x^2 - a^2} = \sqrt{(x' - x)(x - x'')},$$

x' et x'' étant les racines de l'équation

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0,$$

savoir

$$x' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad x'' = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Pour construire la courbe, on construira d'abord la parabole

$$y^2 = ax,$$

puis entre les abscisses $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ et $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, on portera, à partir de chaque point de la parabole, des ordonnées positives et négatives égales à Y.

x croissant de $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ à $\frac{3a}{2}$, Y croît de zéro à sa valeur maximum $\frac{a}{2}\sqrt{5}$; puis, x croissant de $\frac{3a}{2}$ à $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, Y décroît de sa valeur maximum à zéro. Pour $x = a$, $Y = a$.

On obtient ainsi deux ovales placés symétriquement par rapport à l'axe OX, et ayant pour lignes diamétrales des cordes parallèles à OY les arcs de la parabole compris entre les abscisses $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ et $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Ces ovales touchent l'axe OX au point $x = a$, c'est-à-dire au point B.

Aux points correspondant à la valeur maximum de Y, les tangentes aux ovales sont respectivement parallèles aux tangentes à la parabole, aux points de même abscisse.

On obtient les points où la tangente est parallèle à OX en égalant à zéro la dérivée de y, ce qui donne l'équation

$$4x^3 - 11ax^2 + 6a^2x + a^3 = 0,$$

d'où

$$x = a, \quad y = 0,$$

$$x = \frac{a(7 + \sqrt{65})}{8} = 1,88\,a,$$

$$y = \pm \frac{a}{8}\left(\sqrt{56 + 8\sqrt{65}} + \sqrt{10\sqrt{65} - 20}\right) = \pm 3,475\,a.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Tourrettes; Agabriel, maître-répetiteur au lycée de Châteauroux; Georges Lambiotte et Jules Freson, elèves à l'École des Mines de Liége.