C. HARKEMA

Sur quelques cas de séparation des variables dans l'équation $Mdx + Ndy = 0$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 215-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__215_1>

SUR QUELQUES CAS DE SÉPARATION DES VARIABLES DANS L'ÉQUATION $M\,dx + N\,dy = 0$;

PAR M. C. HARKEMA,
Professeur de Mathématiques au Gymnase philologique à Saint-Pétersbourg.

Lorsque l'équation différentielle

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{1}$$

dont on se propose de trouver l'intégrale, ne rentre pas dans le nombre des types considérés ordinairement (c'est-à-dire lorsqu'elle n'est ni une différentielle totale, ni homogène par rapport aux variables, ou linéaire), c'est parfois un changement convenable de coordonnées (*) qui peut rendre des avantages considérables.

(*) Vu la signification géométrique de l'équation (1).

Je veux montrer, dans cette Note, qu'il est souvent possible de décider, à la seule inspection de l'équation, ou bien, par des calculs fort simples, dans quel cas le passage aux coordonnées polaires peut faciliter l'intégration en permettant de séparer les variables.

Si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta,$$

l'équation (1) devient

$$[\mathrm{M}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \mathrm{N}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta]\frac{dr}{r}$$
$$+ [\mathrm{N}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - \mathrm{M}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta]d\theta = 0;$$

ou bien, en omettant les parenthèses intérieures et en transformant,

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta}\cdot\frac{dr}{r} - d\theta = 0.$$

Dans cette équation, les variables pourront être séparées dès que l'expression

$$\frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta}$$

sera une fonction d'une seule variable r ou θ, ou bien, un produit de deux fonctions, tel que $\varphi(r)\,\psi(\theta)$.

On voit donc que, en posant, pour abréger, $\frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta} = \mathrm{P}$, les variables pourront être séparées dans les cas suivants :

1° $\qquad \mathrm{P} = \mathrm{F}(r),$

2° $\qquad \mathrm{P} = f(\theta),$

3° $\qquad \mathrm{P} = \varphi(r)\,\psi(\theta),$

en désignant par F, f, φ et ψ des fonctions quelconques.

Mais, comme

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

on aura

$$P = \frac{Mx + Ny}{My - Nx},$$

et la séparation des variables pourra s'effectuer dès qu'on aura

1°, $$\frac{Mx + Ny}{My - Nx} = F_1(x^2+y^2),$$

2° $$\frac{Mx + Ny}{My - Nx} = f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

3° $$\frac{Mx + Ny}{My - Nx} = \varphi_1(x^2+y^2)\psi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

les fonctions F_1, f_1, φ_1 et ψ_1 étant différentes de celles que nous avons désignées par F, f, φ, ψ.

Application.

Soit proposé de trouver l'intégrale de l'équation

$$xy(x^2+y^2+1)dx + (y^4 + x^2y^2 - x^2)dy = 0.$$

Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$P = \frac{x^2y(x^2+y^2+1) + y(y^4+x^2y^2-x^2)}{xy^2(x^2+y^2+1) - x(y^4+x^2y^2-x^2)} = \frac{y}{x}(x^2+y^2),$$

et nous sommes conduit au troisième cas.

L'équation en coordonnées polaires (2) sera, d'après cela,

$$\operatorname{tang}\theta\, r dr - d\theta = 0,$$

et son intégrale

$$\frac{r^2}{2} - \log(C\sin\theta) = 0,$$

C désignant une constante.

L'intégrale de l'équation proposée sera donc

$$x^2 + y^2 - \log\left(\frac{C^2 y^2}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$