ÉDOUARD LUCAS

Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 18-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__18_1>

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Soit, en général, une fonction entière $\Delta f(x)$ égale à la différence d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n;$$

en remplaçant successivement x par $1, 2, 3, \ldots, (x-1)$, et en posant

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (x-1)^n,$$

on obtient par addition

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \ldots + a_n S_0,$$

ou, *symboliquement*,

$$(1)\qquad f(x)-f(1)=\Delta f(S),$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S.

Faisons, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $(x-1)^n$ ou à x^n, nous obtenons

$$(2)\qquad (x-1)^n = S^n-(S-1)^n,$$

$$(3)\qquad x^n-1 = (S+1)^n-S^n,$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$(4)\qquad x^n+(x-1)^n-1=(S+1)^n-(S-1)^n,$$

$$(5)\qquad x^n-(x-1)^n-1=(S+1)^n+(S-1)^n-2S_n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux, par voie récurrente. Mais on peut, pour parvenir au même but, se servir de la formule suivante. En effet, faisons encore, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$, nous obtenons l'équation

$$(6)\qquad (2x-1)^n-1=(2S+1)^n-(2S-1)^n,$$

qui a été donnée par M. Gilbert, au moyen de l'analyse infinitésimale (*Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Enfin, si, dans la formule (1), on suppose

$$f(x)=(x+z)(x+z+1)\ldots(x+z+n-1),$$

on obtient

$$(7)\qquad f(x)-f(1)=n(S+z+1)(S+z+2)\ldots(S+z+n-1),$$

et plus particulièrement, pour $z=0$ et pour $z=-1$,

$$(8)\qquad \begin{cases} x(x+1)\ldots(x+n-1) \\ \quad = n(S+1)(S+2)\ldots(S+n-1)+1.2.3\ldots n, \\ (x-1)x\ldots(x+n-2)=nS(S+1)\ldots(S+n-2). \end{cases}$$

2. On tire du système des n équations obtenues en remplaçant successivement n par 1, 2, 3, ..., n, dans la formule (3), le déterminant

$$(9)\qquad 1.2.3\ldots n.S_{n-1} = \begin{vmatrix} x^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \ldots & C_n^1 & 1 \\ x^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \ldots & C_{n-1}^1 & 1 \\ x^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \ldots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^2 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \\ x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient un déterminant plus simple au moyen de l'une des formules (4), (5) ou (6). Cette dernière donne, par exemple, pour des valeurs impaires de l'exposant

$$(10)\qquad 1.3.5\ldots(2n+1)\,2^{2n+1}S_{2n} = \begin{vmatrix} (2x-1)^{2n+1} & C_{2n+1}^{2n-2} & C_{2n+1}^{2n-4} & \ldots & C_{2n+1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-1} & C_{2n-1}^{2n-2} & C_{2n-1}^{2n-4} & \ldots & C_{2n-1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-3} & 0 & C_{2n-3}^{2n-4} & \ldots & C_{2n-3}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2x-1)^3 & 0 & 0 & \ldots & C_3^2 & 1 \\ (2x-1)^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin on peut obtenir S_n en fonction d'un déterminant contenant au moins $(n+1)$ fonctions arbitraires de x; pour cela, il suffit de considérer $(n+1)$ équations semblables à l'équation (1).

3. La formule (1) peut être généralisée par l'introduction de nouvelles variables. En effet, on peut écrire cette formule de la manière suivante :

$$\Delta_x f(1, y) = \Delta_s f(S, y),$$

en supposant l'accroissement de x égal à $(x-1)$, et celui de S à l'unité; on en déduit

$$(11) \qquad \Delta^2_{x,y} f(1,1) = \Delta^2_{s,s'} f(S, S'),$$

et, de même,

$$(12) \qquad \Delta^p_{x,y,z,\dots} f(1,1,1,\dots) = \Delta^p_{s,s',s'',\dots} f(S, S', S'', \dots),$$

p désignant le nombre des variables; les accroissements du premier membre sont respectivement égaux à $(x-1)$, $(y-1)$, $(z-1)$, ... et ceux du second membre à l'unité. On ne doit pas réduire les S avec les S' et les S''; mais on remplacera, après le développement du second membre, S^n, S'^n, S''^n par S_n, et l'on obtiendra des relations entre les produits deux à deux, trois à trois, etc., des sommes S.

4. On peut poser, symboliquement, l'égalité

$$(13) \qquad n S_{n-1} = (x + B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de B par des indices, et B_0 par l'unité. Ces coefficients B sont appelés *nombres de Bernoulli,* parce que Jacques Bernoulli les a remarqués, le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison des formules (9) et (13) donne

$$(14) \qquad 1.2.3\dots n.B_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il serait facile de trouver ainsi un grand nombre de formules semblables, mais on peut aussi calculer les coefficients B de la manière suivante. En changeant x

en $x+1$, dans la relation (13), on obtient, par différence, l'identité

$$(15)\qquad n x^{n-1} = (x+B+1)^n - (x+B)^n,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de x et, par suite, quelle que soit la valeur de x. En particulier, pour $x=0$, $x=\pm 1$, $x=-\frac{1}{2}$, et, par addition et par soustraction, on a les relations récurrentes

$$(16)\qquad \begin{cases} (B+1)^n - B^n = 0, \\ B^n - (B-1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B+1)^n + (B-1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B+2)^n - (B+1)^n = n, \\ (2B+1)^n - (2B-1)^n = 2n(-1)^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La première de ces relations a été indiquée par Moivre.

On peut encore obtenir les nombres B au moyen de déterminants déduits des équations (15) et (16); le calcul donne, pour les premiers coefficients,

$$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_6 = \frac{1}{42},\qquad B_8 = -\frac{1}{30},\qquad \dots$$

Les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1, ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des formules (16); d'autre part, l'équation (14) fait voir que le produit $1.2.3\ldots n\, B_{n-1}$ est entier.

Enfin on déduit encore de la formule (13) l'égalité

$$(17)\qquad \frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n,$$

qui permet de calculer rapidement S_n par voie d'intégration, en calculant chaque fois la constante par l'une des conditions

$$S_n = 1 \text{ pour } x = 2 \quad \text{et} \quad S_n = 0 \text{ pour } x = 1.$$

5. Si l'on observe que le premier membre de la formule (15) est la dérivée de x^n, et le second, la différence de $(x + B)^n$, on a, plus généralement,

$$(18) \qquad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x).$$

Posons, par exemple,

$$f(x) = x(x + 1) \ldots (x + n - 1),$$

nous obtenons

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{n}{x} = \dfrac{B + x + 1}{x + 1} \dfrac{B + x + 2}{x + 2} \cdots \dfrac{B + x + n - 1}{x + n - 1} \\ \quad = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \ldots + \dfrac{1}{x + n - 1}. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse $x = 1$, nous avons

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{n}{1} \dfrac{B + 2}{2} \dfrac{B + 3}{3} \cdots \dfrac{B + n}{n} \\ \quad = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

et, pour $x = 0$, en augmentant n d'une unité,

$$(21) \qquad (B + 1)(B + 2) \ldots (B + n) = \frac{1.2.3\ldots n}{n + 1}.$$

La formule (18) donne, pour $x = 0$,

$$(22) \qquad f(B + 1) - f(B) = f'(0);$$

faisons maintenant $f(x) = e^{xz}$, il vient

$$e^{Bz}(e^z - 1) = z,$$

et, par suite,

(23) $$e^{Bz} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Cette formule, souvent employée en Analyse, subsiste pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π.

Faisons encore, dans la formule (22),

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right)z,$$

nous obtenons

(24) $$\cos Bz = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}.$$

6. Si l'on introduit une seconde variable y dans la formule (18), on a

$$\Delta_x f(x + B, y) = \frac{df(x, y)}{dx},$$

en supposant $\Delta x = 1$; si l'on applique ce résultat à la fonction $\frac{df(x, y)}{dx}$ de y, on aura

(25) $$\Delta_{x,y} f(x + B, y + B') = \frac{d^2 f(x, y)}{dx\,dy},$$

et, en général,

(26) $$\Delta^p_{x,y,z,\ldots} f(x + B, y + B', z + B'', \ldots) = \frac{d^p f(x, y, z, \ldots)}{dx\,dy\,dz\ldots},$$

en supposant $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \ldots = 1$. On ne réduira pas les B avec les B′ et les B″; mais, lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera B^n, B'^n, B''^n, ... par B_n. On aura ainsi les relations contenant les produits deux à deux, trois à trois, etc., des nombres de Bernoulli.

7. On a, d'après les résultats obtenus dans un article

précédent (*Nouvelles Annales*, novembre 1875), la formule

$$(27)\quad S_m S_n - S_{m+n} = S^m\,\frac{(S+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S^n\,\frac{(S+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1};$$

pour $m = n$,

$$(28)\qquad \frac{n+1}{2}\,S_n^2 = S^n(S+B)^{n+1} - S^n B^{n+1},$$

en remplaçant B_1 par zéro. On déduit, inversement,

$$(29)\quad 2\,S_{2n+1} = \left|\begin{array}{cccccc} (n+1)\,S_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \ldots & 0 & 0 \\ n\,S_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \ldots & 0 & 0 \\ (n-1)\,S_{n-2}^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4\,S_3^2 & 0 & 0 & \ldots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3\,S_2^2 & 0 & 0 & \ldots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 2\,S_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Il résulte immédiatement de la formule (13) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \quad \text{et} \quad \frac{S_{2n+1}}{x^2}$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \quad \text{et} \quad \frac{2n+1}{2}\,B_{2n},$$

lorsque x tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les relations précédentes, dans les relations (27) et (29), par exemple, on trouve

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} B_{m+n} = {} & B^m\,\frac{(B+B')^{n+1} - B'^{n+1}}{n+1} \\ & + B^n\,\frac{(B+B')^{m+1} - B'^{m+1}}{m+1}, \end{aligned}\right.$$

et

$$
(31) \qquad (2n+1)B_{2n} = \begin{vmatrix}
(n+1)B_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \dots & 0 & 0 \\
n B_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\
(n-1)B_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
4B_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\
3B_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix}.
$$