

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 160-176

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__160_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THEORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

86. Comme application immédiate de notre théorie, nous donnons les formules fondamentales de la géométrie polyédrique, distance de deux points, surface d'un triangle, volume d'un tétraèdre, angle de deux droites et de deux plans, axes principaux d'une surface du second degré, etc., les figures étant rapportées au système de huit plans, déterminant les tétraèdres de référence $abcd$, $a'b'c'd'$.

Comme on le verra, nos formules, à cause de leur parfaite symétrie, sont simples, malgré le grand nombre de termes qu'elles contiennent.

Nous donnons ensuite la théorie des surfaces homofocales, des rayons de courbure, des lignes géodésiques et de certains systèmes de surfaces. Comme nous n'avons ici en vue que les surfaces du second degré, nous

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5.

emploierons simplement le mot *surface* pour les désigner.

Formules fondamentales de la géométrie polyédrique.

87. Considérons la relation

$$X_4 = -36 \pi^6 \nabla_4 e f g h . e' f' g' h'$$

démontrée au n° 21. On a, pour le développement de X_4 ,

$$X_4 = \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) & (h, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) & (h, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) & (h, C) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) & (h, D) \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} (e', A') & (f', A') & (g', A') & (h', A') \\ (e', B') & (f', B') & (g', B') & (h', B') \\ (e', C') & (f', C') & (g', C') & (h', C') \\ (e', D') & (f', D') & (g', D') & (h', D') \end{vmatrix}$$

et (8)

$$\pi^6 \nabla_4 = - \frac{(3V)^3}{2 ABCD} \cdot \frac{(3V')^3}{2 A' B' C' D'}$$

Dans le cas particulier où les points e', f', g', h' coïncident respectivement avec les sommets a', b', c', d' du tétraèdre $a' b' c' d'$, on voit que cette relation se réduit à

$$(a) \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) & (h, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) & (h, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) & (h, C) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) & (h, D) \end{vmatrix} = \frac{(3V)^3}{ABCD} \cdot 3 e f g h;$$

elle donnera le *volume du tétraèdre e f g h*, connaissant les *distances de ses sommets aux faces du tétraèdre a b c d*, dont le volume est représenté par V .

Si le point h coïncide avec le sommet d du tétraèdre $a b c d$, on a

$$(h, A) = (h, B) = (h, C) = 0 \quad \text{et} \quad (h, D) = (d, D).$$

Comme d'ailleurs $\frac{(3V)^2}{ABCD} = 2(d, D) \sin ABC$, nous trouvons, en désignant par H le plan efg ,

$$(b) \quad \left| \begin{array}{ccc} (e, A) & (f, A) & (g, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) \end{array} \right| = 6efgd \sin ABC = 2efg \sin ABC (d, H).$$

Si, dans cette relation, le point g coïncide avec le sommet c du tétraèdre $abcd$, on a

$$(g, A) = (g, B) = 0, \quad (g, C) = (c, C),$$

de sorte que

$$\left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right| = \frac{6efcd \sin ABC}{(c, C)};$$

or

$$(c, C) = cd \sin(\nu, C). \quad \sin ABC = \sin AB \sin(\nu, C),$$

et comme, d'ailleurs,

$$6efcd = ef \cdot cd \mid \varepsilon, \nu \mid,$$

ε représentant la droite ef , on aura

$$(c) \quad \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right| = ef \cdot \mid \varepsilon, \nu \mid \sin AB,$$

formule que nous avons employée au n° 17.

Désignant par E et F deux plans menés par la droite ε , on a aussi

$$(d) \quad \left| \begin{array}{cc} (c, E) & (c, F) \\ (d, E) & (d, F) \end{array} \right| = cd \mid \varepsilon, \nu \mid \sin EF.$$

Coordonnées d'un plan déterminé par trois de ses points.

88. Lorsqu'un plan H est déterminé par trois points,

e, f, g , au lieu de prendre pour ses coordonnées les distances $(a, H), (b, H), (c, H), (d, H)$ de ce plan aux sommets du tétraèdre $abcd$, on pourra quelquefois employer avec avantage les déterminants

$$\begin{vmatrix} (e, C) & (f, C) & (g, C) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (e, B) & (f, B) & (g, B) \\ (e, A) & (f, A) & (g, A) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) \end{vmatrix},$$

lesquels, d'après la relation (b) , expriment ces mêmes distances multipliées par des facteurs constants.

Coordonnées d'un point déterminé par trois plans.

89. Si l'on désigne par E, F, G trois plans se coupant au point h , au lieu de prendre pour les coordonnées de ce point les distances $(h, A), (h, B), (h, C), (h, D)$ aux faces du tétraèdre $abcd$, on pourra employer les déterminants

$$\begin{vmatrix} (c, E) & (c, F) & (c, G) \\ (b, E) & (b, F) & (b, G) \\ (d, E) & (d, F) & (d, G) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) & (a, G) \\ (c, E) & (c, F) & (c, G) \\ (d, E) & (d, F) & (d, G) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (b, E) & (b, F) & (b, G) \\ (a, E) & (a, F) & (a, G) \\ (d, E) & (d, F) & (d, G) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) & (a, G) \\ (b, E) & (b, F) & (b, G) \\ (c, E) & (c, F) & (c, G) \end{vmatrix},$$

lesquels, d'après la même relation (b) , expriment ces mêmes distances multipliées par des facteurs constants.

Coordonnées d'une droite.

90. Lorsqu'une droite ε est déterminée par deux de ses points e et f , on peut prendre pour ses coordonnées relatives au tétraèdre $abcd$ les six déterminants

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, C) & (f, C) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right|, \\ & \left| \begin{array}{cc} (e, B) & (f, B) \\ (e, C) & (f, C) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (e, D) & (f, D) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Nous les désignerons, pour abrégé, par Z_{AB} , Z_{AC} , Z_{AD} , Z_{BC} , Z_{CD} , Z_{DB} .

Lorsque la droite ε est déterminée par deux plans E, F menés par cette droite, on peut prendre pour ses coordonnées les six déterminants

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (a, E) & (a, F) \\ (c, E) & (c, F) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (a, E) & (a, F) \\ (d, E) & (d, F) \end{array} \right|, \\ & \left| \begin{array}{cc} (b, E) & (b, F) \\ (c, E) & (c, F) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (c, E) & (c, F) \\ (d, E) & (d, F) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} (d, E) & (d, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Nous les désignerons, pour abrégé, par Z_{ab} , Z_{ac} , Z_{ad} , Z_{bc} , Z_{cd} , Z_{db} .

La relation (c) montre que l'on peut remplacer les coordonnées de la première série par

$$| \varepsilon, \nu |, \quad | \varepsilon, \mu |, \quad | \varepsilon, \alpha |, \quad | \varepsilon, \lambda |, \quad | \varepsilon, \gamma |, \quad | \varepsilon, \beta |.$$

Chaque coordonnée de la droite ε est égale à sa plus courte distance à l'une des arêtes du tétraèdre de référence, multipliée par le sinus de l'angle que cette arête fait avec la droite.

La relation (d) montre que ces mêmes coordonnées

représentent également les termes de la seconde série, mais rangés dans un ordre différent.

Considérons une seconde droite ϵ' déterminée par deux de ses points e', f' et désignons par Z' ses coordonnées.

Dans le déterminant (a) remplaçons les points g et h par e' et f' , nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_{AB}Z'_{CD} + Z_{AC}Z'_{DB} + Z_{AD}Z'_{BC} + Z_{BC}Z'_{AD} \\ + Z_{CD}Z'_{AB} + Z_{DB}Z'_{AC} = \frac{(3V)^3}{ABCD} 3e'f'f'. \end{aligned}$$

Si la droite ϵ' est déterminée par deux plans E', F' , on a

$$\begin{aligned} Z_{ab}Z'_{cd} + Z_{ac}Z'_{db} + Z_{ad}Z'_{bc} + Z_{bc}Z'_{ad} \\ + Z_{cd}Z'_{ab} + Z_{db}Z'_{ac} = \frac{(3V')^3}{E.F.E'.F'} 3abcd, \end{aligned}$$

en désignant par V' le volume du tétraèdre formé par les quatre plans E, F, E', F' , et par ces mêmes lettres les aires des faces de ce tétraèdre.

De l'une ou l'autre de ces deux formules on peut déduire la suivante, qui, à son tour, les comprend toutes les deux :

$$\begin{aligned} \frac{|\epsilon, \nu \quad | \quad \epsilon', \gamma \quad |}{|\nu, \gamma \quad |} + \frac{|\epsilon, \mu \quad | \quad \epsilon', \beta \quad |}{|\mu, \beta \quad |} + \frac{|\epsilon, \alpha \quad | \quad \epsilon', \lambda \quad |}{|\alpha, \lambda \quad |} \\ + \frac{|\epsilon, \lambda \quad | \quad \epsilon', \alpha \quad |}{|\alpha, \lambda \quad |} + \frac{|\epsilon, \gamma \quad | \quad \epsilon', \nu \quad |}{|\nu, \gamma \quad |} \\ + \frac{|\epsilon, \beta \quad | \quad \epsilon', \mu \quad |}{|\mu, \beta \quad |} = |\epsilon, \epsilon'|. \end{aligned}$$

Lorsque les droites ϵ, ϵ' coïncident

$$\begin{aligned} Z_{ab}Z_{cd} + Z_{ac}Z_{db} + Z_{ad}Z_{bc} &= 0, \\ Z_{AB}Z_{CD} + Z_{AC}Z_{DB} + Z_{AD}Z_{BC} &= 0, \\ \frac{|\epsilon, \nu \quad | \quad \epsilon, \gamma \quad |}{|\nu, \gamma \quad |} + \frac{|\epsilon, \mu \quad | \quad \epsilon, \beta \quad |}{|\mu, \beta \quad |} + \frac{|\epsilon, \alpha \quad | \quad \epsilon, \lambda \quad |}{|\alpha, \lambda \quad |} &= 0. \end{aligned}$$

C'est une des relations qui existent nécessairement entre les six coordonnées d'une droite; nous donnons plus loin (100) la seconde relation.

A l'aide des relations (c) et (d), on voit que

$$Z'_{CD} = \frac{\sin CD}{ab} \frac{e' f'}{\sin E' F'} Z'_{ab};$$

mais

$$\frac{\sin CD}{ab} = \frac{(3V)^3}{ABCD} \frac{1}{2(a, A)(b, B)},$$

par conséquent

$$Z'_{CD} = \frac{(3V)^3}{ABCD} \frac{e' f'}{\sin E' F'} \frac{Z'_{ab}}{2(a, A)(b, B)},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les autres coordonnées.

La première des relations précédentes devient

$$\begin{aligned} \frac{Z_{AB} Z'_{ab}}{(a, A)(b, B)} + \frac{Z_{AC} Z'_{ac}}{(a, A)(c, C)} + \frac{Z_{AD} Z'_{ad}}{(a, A)(d, D)} \\ + \frac{Z_{BC} Z'_{bc}}{(b, B)(c, C)} + \frac{Z_{CD} Z'_{cd}}{(c, C)(d, D)} \\ + \frac{Z_{DB} Z'_{db}}{(d, D)(b, B)} = ef. \sin E' F' | \varepsilon, \varepsilon' |. \end{aligned}$$

91. Si l'on développe le déterminant (a) par rapport aux éléments de la dernière colonne et que l'on tienne compte de la relation (b), on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} (h, H) = \frac{(a, H)(h, A)}{(a, A)} + \frac{(b, H)(h, B)}{(b, B)} \\ + \frac{(c, H)(h, C)}{(c, C)} + \frac{(d, H)(h, D)}{(d, D)}; \end{aligned}$$

elle donne la distance d'un point *h* à un plan *H*, lorsque l'on connaît les coordonnées du plan et du point.

Les distances d'un plan aux sommets de un ou deux tétraèdres sont liées entre elles par des relations que l'on trouvera plus loin (103).

Déterminer les coordonnées du centre de la surface S.

92. Divisons par $(o, E) (o, E')$ les deux membres de la relation (2) du n° 14,

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} I_{AE'}$$

Si le plan E passe à l'infini à cause de

$$\frac{I_{EE'}}{(o, E) (o, E')} = \frac{1}{\pi^2} \quad (13),$$

on aura

$$\frac{(o, E')}{\pi^2} = \frac{I_{AE'}}{(a, A)} + \frac{I_{BE'}}{(b, B)} + \frac{I_{CE'}}{(c, C)} + \frac{I_{DE'}}{(d, D)},$$

et de même

$$\frac{(o, E)}{\pi^2} = \frac{I_{EA'}}{(a', A')} + \frac{I_{EB'}}{(b', B')} + \frac{I_{EC'}}{(c', C')} + \frac{I_{ED'}}{(d', D')}.$$

Ces deux relations donnent les distances du centre o de la surface S à des plans quelconques E, E' , en prenant pour tétraèdre de référence $abcd$ où $a'b'c'd'$.

Si, dans la première, on prend, pour le plan E' , successivement les faces du premier de ces tétraèdres, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{(o, A)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AA}}{(a, A)}, & \frac{(o, B)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AB}}{(o, A)}, \\ \frac{(o, C)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AC}}{(a, A)}, & \frac{(o, D)}{\pi^2} &= \sum \frac{I_{AD}}{(a, A)}. \end{aligned}$$

*Équation du cône circonscrit à la surface S,
ayant pour sommet le point f.*

93. Soit e un point quelconque du cône, ε l'arête ef , on a (2)

$$\overline{ef}^2 I_e = I_e I_f - I_{ef}^2.$$

Si donc le point f est fixe, $I_e I_f - I_{ef}^2 = 0$ sera l'équation du cône circonscrit en coordonnées de points.

Si, dans le déterminant X_2 (21), on suppose que les points e', f' coïncident avec e, f , et que ce dernier soit fixe,

$$X_2 = 0$$

représente également l'équation par points du cône circonscrit à la surface S, et dont le sommet est au point f .

L'équation du cône asymptote est évidemment

$$I_e + 1 = 0.$$

*Équation de la conique déterminée dans la surface S
par le plan F.*

94. Appelons E un plan mené par une tangente quelconque φ de la conique, on a (8)

$$-\frac{1}{\pi^2} \overline{EF}^2 = I_E I_F - I_{EF}^2.$$

Si donc le plan F est fixe, $I_E I_F - I_{EF}^2 = 0$ sera l'équation par plans de la conique d'intersection.

Si, dans le déterminant x_2 (22), on suppose que les plans E', F' coïncident avec E, F et que ce dernier soit fixe,

$$x_2 = 0$$

représente également l'équation par plans de la conique, suivant laquelle le plan F coupe la surface S.

Si le plan F est pris à l'infini, on voit que la section correspondante a pour équation

$$\pi^2 \mathbf{I}_E = (o, E)^2.$$

Déterminer les longueurs des axes principaux de la surface S, rapportée à deux tétraèdres de référence.

95. Si l'on divise par $(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')$ les deux membres de la relation (18), on a

$$\frac{\mathbf{I}_{\varepsilon\varepsilon'}}{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')} = \sum \frac{\mathbf{I}_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} \frac{|\varepsilon, \nu| |\varepsilon', \nu'|}{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')}.$$

Lorsque les droites $\varepsilon, \varepsilon'$ sont dans un même plan diamétral E et qu'elles s'éloignent à l'infini dans ce plan, le premier membre de l'égalité est égal à $-\mathbf{I}_E$ (12); d'autre part,

$$\frac{|\varepsilon, \nu|}{(o, \varepsilon)} = \sin(\nu, E), \quad \frac{|\varepsilon', \nu'|}{(o, \varepsilon')} = \sin(\nu', E),$$

de sorte que

$$-\mathbf{I}_E = \sum \frac{\mathbf{I}_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} \sin(\nu, E) \sin(\nu', E).$$

Soient F, G deux autres plans diamétraux perpendiculaires entre eux et au plan E, ces deux plans donneront une relation analogue à la précédente et, si l'on remarque que $\mathbf{I}_E + \mathbf{I}_F + \mathbf{I}_G = -\frac{S_1^2}{\pi^2}$ (81), nous trouverons, en ajoutant les trois relations obtenues ainsi,

$$(a) \quad \frac{S_1^2}{\pi^2} = \sum \frac{\mathbf{I}_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} \cos(\nu, \nu').$$

Divisons par $oe \cdot oe'$ les deux membres de la relation

(15), nous avons

$$\frac{I_{ee'}}{oe \cdot oe'} = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \frac{(e, A)(e', A')}{oe \cdot oe'}$$

Lorsque les points e, e' sont situés sur un même diamètre ε de la surface S , et que ces points s'éloignent à l'infini sur ce diamètre, le premier membre de l'égalité est égal à $-I_\varepsilon$ (11) ; d'autre part,

$$\frac{(e, A)}{oe} = \sin(\varepsilon, A), \quad \frac{(e', A')}{oe'} = \sin(\varepsilon, A'),$$

de sorte que

$$-I_\varepsilon = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \sin(\varepsilon, A) \sin(\varepsilon, A').$$

Soient φ et ψ deux autres diamètres perpendiculaires entre eux et au diamètre ε , ces deux diamètres donneront une relation analogue à la précédente et, si l'on remarque que $I_\varepsilon + I_\varphi + I_\psi = -\frac{1}{S^2}$ (82), on trouvera, en ajoutant les trois relations ainsi obtenues,

$$(b) \quad \frac{1}{S^2} = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \cos(A, A'),$$

AA' désignant l'angle formé par les normales aux plans A, A' , ces normales étant prolongées extérieurement aux faces A et A' .

D'après le n° 2, on a d'ailleurs

$$(c) \quad \pi^2 = -\frac{36 abcd \cdot a'b'c'd'}{\Delta_4} = -\frac{36 VV'}{\Delta_4},$$

de sorte que les trois relations (a), (b), (c) détermineront les carrés des demi-axes principaux de la surface S , et l'on a ce théorème :

Étant donnés une surface du second degré S et deux

tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$, les carrés X des demi-axes principaux de la surface sont racines de l'équation

$$X^3 \frac{\Delta_4}{36VV'} + X^2 \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} \cos \nu\nu' \\ - X \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \cos(A, A') + 1 = 0.$$

Corollaires de la relation $I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} I_{aa'}$ (14).

96. Si E est le plan polaire du point e' par rapport à la surface S , cette relation devient

$$(e, E) = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} (a, E).$$

Imaginons deux sphères ayant pour centres les points q et q' et telles que le plan E soit le plan radical de ces sphères.

Si l'on désigne par P_e, P'_e les puissances d'un point e par rapport à ces sphères, on a

$$\frac{(e, E)}{P_e - P'_e} = \frac{(a, E)}{P_a - P'_a} = \dots = \frac{1}{2qq'};$$

par conséquent :

Étant données deux sphères q et q' , si l'on désigne par P_e, P'_e les puissances d'un point arbitraire e , par rapport à ces sphères, par $P_a, P'_a, P_b, P'_b, \dots$ les puissances des sommets d'un tétraèdre $abcd$, par rapport à ces mêmes sphères,

$$P_e - P'_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} (P_a - P'_a).$$

Comme cas particulier, nous avons ce théorème :

Un tétraèdre $abcd$ étant inscrit à une sphère, si l'on

(172)

désigne par P_e la puissance d'un point e par rapport à cette sphère et par o un point quelconque,

$$\overline{oe}^{-2} - P_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} \overline{oa}^{-2}.$$

97. Lorsque la surface S est une sphère, la relation (14) devient, R étant le rayon de cette sphère (23),

$$-1 + \frac{P_{ee'}}{R^2} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} \left(-1 + \frac{P_{ae'}}{R^2} \right);$$

par conséquent,

$$P_{ee'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} P_{ae'}.$$

Un autre tétraèdre $a'b'c'd'$ conduirait de même à la relation

$$P_{ee'} = \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} P_{ea'}.$$

Déterminant au moyen de cette dernière les valeurs de $P_{ae'}$, $P_{be'}$, \dots , et les substituant dans la première, on a

$$P_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} P_{aa'} \text{ (16 termes).}$$

Cette égalité serait donnée de suite par la relation (15) appliquée à la sphère. Si le point e' coïncide avec e , on a la relation $\overline{oe}^{-2} = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)(a', A')} P_{aa'}$ pour le carré de la distance des deux points o et e dont l'un est déterminé par ses coordonnées.

98. Si l'on remplace les puissances par les valeurs

$$\begin{aligned} 2 P_{ee'} &= \overline{oe}^{-2} + \overline{oe'}^{-2} - \overline{ee'}^{-2}, \\ 2 P_{aa'} &= \overline{oa}^{-2} + \overline{oa'}^{-2} - \overline{aa'}^{-2}, \end{aligned}$$

o étant le centre de la sphère,

$$\overline{oe}^2 + \overline{oe'}^2 - \overline{ee'}^2 = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} (\overline{oa}^2 + \overline{oa'}^2 - \overline{aa'}^2).$$

Mais

$$\begin{aligned} \overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)} \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} &= \overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)}, \\ \overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')} \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} &= \overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')}; \end{aligned}$$

donc

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{oe}^2 + \overline{oe'}^2 - \overline{ee'}^2 &= \sum oa^2 \frac{(e, A)}{(a, A)} \\ &+ \sum oa'^2 \frac{(e', A')}{(a', A')} - \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2. \end{aligned} \right.$$

Lorsque les deux tétraèdres coïncident, ainsi que les points e, e' ,

$$\overline{oe}^2 = \sum \overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)} - \sum \frac{(e, A)(e, B)}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2.$$

On aurait de même

$$\overline{oe'}^2 = \sum \overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')} - \sum \frac{(e', A')(e', B')}{(a', A')(b', B')} \overline{a'b'}^2,$$

de sorte que la relation (A) devient

$$\begin{aligned} \overline{ee'}^2 &= \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2 - \sum \frac{(e, A)(e, B)}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2 \\ &\quad - \sum \frac{(e', A')(e', B')}{(a', A')(b', B')} \overline{a'b'}^2. \end{aligned}$$

Cette relation donne le carré de la distance des deux points e, e' , connaissant les coordonnées de ces points par rapport aux deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$. Le premier signe Σ contient seize termes, les deux autres chacun six. On trouvera plus loin (101) une autre expression de cette distance.

Lorsque les tétraèdres coïncident, cette formule prend la forme

$$\overline{ce'}^2 = - \sum \frac{[(e, A) - (e', A)][(e, B) - (e', B)]}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2 ;$$

il y a six termes analogues.

99. Circonscrivons une sphère au tétraèdre $abcd$ et soit P_e la puissance du point e par rapport à cette sphère; soit encore $P_{e'}$ la puissance du point e' par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$. Les points q, q' seront les centres de ces deux sphères. D'après (96),

$$\overline{oc}^2 - P_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} \overline{oa}^2, \quad \overline{oe'}^2 - P_{e'} = \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} \overline{oa'}^2.$$

La relation (A) devient

$$\overline{ce'}^2 - P_e - P_{e'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2.$$

Supposons que le point e soit le centre de la sphère inscrite au tétraèdre $abcd$, e' le centre de la sphère inscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$.

$$P_e = \overline{qe}^2 - R^2, \quad P_{e'} = \overline{q'e'}^2 - R'^2,$$

R et R' étant les rayons des deux sphères circonscrites. On a donc

$$\overline{ec'}^2 - \overline{qe}^2 - \overline{q'e'}^2 + R^2 + R'^2 = r r' \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')},$$

r, r' étant les rayons des sphères inscrites.

Or, si $\varepsilon, \varepsilon'$ sont les directions $qe', q'e$ et θ l'angle sous lequel se coupent les sphères circonscrites,

$$\begin{aligned} \overline{ec'}^2 + \overline{qq'}^2 - \overline{qe}^2 - \overline{q'e'}^2 &= -2qe' \cdot q'e \cos \varepsilon \varepsilon', \\ \overline{qq'}^2 &= R^2 + R'^2 + 2RR' \cos \theta, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{2RR' \cos \theta + 2qe' \cdot q'e \cos \varepsilon\varepsilon'}{r \cdot r'} = - \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')}.$$

Lorsque les tétraèdres coïncident, $\cos \theta = -1$,

$$\overline{qe}^2 - R^2 = P_e = -r^2 \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)}.$$

Cette dernière relation donne l'expression de la puissance du centre de la sphère inscrite à un tétraèdre par rapport à la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

Corollaires de la relation $I_{uv} = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} I_{v, \gamma}$ (17).

100. Si la surface S est une sphère, on a (24)

$$I_{uv} = - \frac{\cos \varepsilon\varepsilon'}{R^2} + \frac{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \cos PP'}{R^4},$$

$$I_{v, \gamma} = - \frac{\cos \nu\varepsilon'}{R^2} + \frac{(o, \nu)(o, \varepsilon') \cos NP'}{R^4},$$

P, P', N étant les plans diamétraux menés par les droites $\varepsilon, \varepsilon', \nu$.

Remplaçant dans la relation donnée les indices par ces valeurs, on a une égalité qui étant vraie, quel que soit le rayon R , donne les deux suivantes :

$$\cos \varepsilon\varepsilon' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} \cos \nu\varepsilon',$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \cos PP' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} (o, \nu)(o, \varepsilon') \cos NP'.$$

A l'aide d'un second tétraèdre $a'b'c'd'$, on aurait également

$$\cos \varepsilon\varepsilon' = \sum \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} \cos \varepsilon'\nu',$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \cos PP' = \sum \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} (o, \nu')(o, \varepsilon) \cos PN';$$

d'où l'on déduira

$$\cos \varepsilon \varepsilon' = \sum \left| \frac{\varepsilon, \gamma}{\gamma, \nu} \middle| \middle| \frac{\varepsilon', \gamma'}{\gamma', \nu'} \right| \cos \nu \nu' \quad (36 \text{ termes}).$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \cos PP' = \sum \left| \frac{\varepsilon, \gamma}{\gamma, \nu} \middle| \middle| \frac{\varepsilon', \gamma'}{\gamma', \nu'} \right| (o, \nu)(o, \nu') \cos NN' \quad (36 \text{ termes}).$$

La première de ces relations donne le *cosinus de l'angle de deux droites déterminées par leurs coordonnées*.

101. Remplaçons $|\varepsilon, \gamma|$, $|\varepsilon', \gamma'|$ par les valeurs (c, 87), e, f étant deux points pris sur ε, e', f' deux points pris sur ε' ,

$$|\varepsilon, \gamma| = \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right| \frac{1}{ef \sin CD},$$

$$|\varepsilon', \gamma'| = \left| \begin{array}{cc} (e', C') & (f', C') \\ (e', D') & (f', D') \end{array} \right| \frac{1}{e'f' \sin C'D'}.$$

Nos deux expressions deviennent, en se rappelant que

$$cd \sin CD \mid \gamma, \nu \mid = (c, C)(d, D),$$

$$c'd' \sin C'D' \mid \gamma', \nu' \mid = (c', C')(d', D'),$$

$$cf \cdot e'f' \cos \varepsilon \varepsilon' = \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', C') & (f', C') \\ (e', D') & (f', D') \end{array} \right| \frac{cd \cdot c'd' \cos \nu \nu'}{(c, C)(d, D)(c', C')(d', D')},$$

$$oef \cdot oc'f' \cos PP' = \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', C') & (f', C') \\ (e', D') & (f', D') \end{array} \right| \frac{ocd \cdot oc'd' \cos NN'}{(c, C)(d, D)(c', C')(d', D')}.$$

Lorsque les points e', f' coïncident avec les points e, f ,

$$\frac{cf}{ef} = \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e, C') & (f, C') \\ (e, D') & (f, D') \end{array} \right| \frac{cd \cdot c'd' \cos \nu \nu'}{(c, C)(d, D)(c', C')(d', D')},$$

$$\frac{ocf}{oef} = \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e, C') & (f, C') \\ (e, D') & (f, D') \end{array} \right| \frac{ocd \cdot oc'd' \cos NN'}{(c, C)(d, D)(c', C')(d', D')}.$$

Ces relations donnent le *carré de la distance de deux points e et f* et le *carré de l'aire d'un triangle*.

(A suivre.)