NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 142-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__142_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 18

(voir 1re série, t. I, p. 123);

PAR M. H. BROCARD.

On donne cinq points d'une courbe du second degré et une droite située sur le plan des cinq points. Déterminer les points de rencontre de la courbe et de la droite.

La solution de cette question se rattache à une propriété des coniques, dont nous allons rappeler brièvement la démonstration.

THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par deux systèmes de sécantes parallèles* OA, OC; O′A′, O′C′, *on a, entre les segments déterminés snr les sécantes, la relation*

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{O'A'.O'B'}{O'C'.O'D'}$$

Prenons pour axes de coordonnées les deux sécantes OA, OC. L'équation de la conique sera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

faisant successivement x et y nuls, on a

$$OA.OB = \frac{F}{C}, \quad OC.OD = \frac{F}{A};$$

donc

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{A}{C}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, A et C restent invariables; le rapport en question est donc constant. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété établie, soient a, b, c, d, e les cinq points donnés et xy la droite donnée.

Joignons c, d par la droite cd, qui coupe xy en o; et, par les points a, b, menons des parallèles af, bg à xy, jusqu'à leurs rencontres en o', o'' avec la droite $cdo'o$. Nous aurons

$$ox.oy = \frac{o'a.o'f}{o'd.o'c}.od.oc \quad (*).$$

D'ailleurs, les droites af et bg passant, respectivement, par les points a, b de la conique, on peut, par la construction précédente, obtenir les points f et g (**); et, par suite, joindre les milieux de af et de bg, ce qui donne une droite qui coupe xy en son milieu ω. Alors on a

$$ox + oy = 2.o\omega.$$

On est donc ramené à construire un rectangle dont on connaît la surface et la somme (ou la différence) des côtés.

(*) f et g représentent les points où les parallèles af, bg coupent la courbe.

(**) Les points f et g ne peuvent être obtenus au moyen de cette construction qui est indépendante de la position du cinquième, des points donnés e. Mais la construction dont il s'agit ramène la question proposée à celle-ci qui en est un cas particulier : *On donne sur un même plan cinq points a, b, c, d, e d'une conique et une droite af qui passe par l'un de ces points a, déterminer le second point d'intersection f de la courbe et de la droite.* La solution de cette dernière question n'offre aucune difficulté, puisque l'égalité des rapports *anharmoniques* des deux faisceaux $(a.bcdf)$ et $(e.bcdf)$ fait immédiatement connaître la direction du rayon ef. (G.)