NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Question de licence (août 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 73-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__73_0>

QUESTION DE LICENCE (AOUT 1874);

PAR M. MORET-BLANC.

On fait tourner une parabole autour de la tangente au sommet; déterminer, sur la surface de révolution ainsi engendrée, une ligne telle que, en chacun de ses points, la section normale de la surface qui passe par la tangente à la courbe ait un rayon de courbure infini.

Solution analytique.

$$z^2 = 2ax$$

étant l'équation de la parabole génératrice, celle de la surface de révolution sera

$$z^4 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale est, comme on sait,

$$R = \frac{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

où α et β sont les angles que la tangente à la section fait avec les axes Ox et Oy, de sorte que, dl étant la différentielle de l'arc,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dl}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{dl}.$$

Pour que le rayon de courbure soit infini, il faut qu'on ait

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

ou, en remplaçant r, s, t par leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, savoir

$$r = \frac{4a^4(2y^2 - x^2)}{z^7}, \quad s = -\frac{12a^4xy}{z^7}, \quad t = \frac{4a^4(2x^2 - y^2)}{z^7},$$

$$(1) \qquad (2x^2 - y^2)dy^2 - 6xy\,dx\,dy + (2y^2 - x^2)\,dx^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle de la projection sur le plan xOy de la courbe cherchée. Cette équation peut s'écrire

$$2(x\,dy - y\,dx)^2 = (x\,dx + y\,dy)^2;$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{2}(x\,dy - y\,dx),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

et, en intégrant,

$$l\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}$$

ou, en posant $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} = \theta$,

$$(2) \qquad r = ce^{\pm\sqrt{2}\theta},$$

c étant une constante, qu'on déterminera par la condition de faire passer la courbe par un point pris à volonté.

La projection de la courbe passant par un point donné de la surface se compose donc de deux spirales logarithmiques égales, tournées en sens contraire, dont l'angle avec le rayon vecteur a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On arrive plus rapidement à ce résultat en supposant que l'on ait amené par une rotation le point considéré de la surface dans le plan de zx. On a alors, dans l'équation (1),

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui indique que la tangente à la projection de la courbe fait avec le rayon vecteur un angle constant, dont la tangente est égale à $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans l'équation (2), on peut regarder c comme une constante arbitraire, ou bien lui donner une valeur fixe, et faire tourner la courbe autour du point O. Ainsi toutes les courbes satisfaisant à la condition énoncée peuvent être considérées comme les intersections de la surface de révolution par un même cylindre à base de spirale logarithmique, qu'on ferait tourner autour de l'axe Oz. On peut remarquer que ce cylindre est indépendant du paramètre de la parabole.

Solution géométrique.

La tangente à la section normale, dont le rayon de courbure est infini, est dirigée suivant une asymptote de l'hyperbole indicatrice.

Soient M un point de la surface par lequel doit passer la courbe, C et D les points où la normale en M rencontre l'axe de la surface et la directrice de la parabole méridienne passant par M; les rayons de courbure des sections normales principales, passant respectivement par les tangentes au parallèle et à la méridienne sont égaux à MC et à 2MD. Les axes de l'indicatrice dirigés suivant ces tangentes sont proportionnels aux racines carrées de ces rayons ou de leurs projections sur le plan d'un parallèle, c'est-à-dire à $\sqrt{r}$ et à $\sqrt{2r+p}$. Si l'on projette l'indicatrice sur le plan xOy, l'axe dirigé suivant la tangente au parallèle conserve sa longueur; celui qui est dirigé suivant la tangente à la parabole est réduit dans le rapport de la sous-tangente à la tangente à cette courbe, c'est-à-dire de

$$\frac{2r}{\sqrt{2r(2r+p)}} = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r+p}}.$$

Or

$$\sqrt{2r+p}\,\frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r+p}} = \sqrt{2r};$$

la tangente de l'angle que l'asymptote de la projection fait avec le rayon vecteur est donc

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La projection de la courbe tracée sur la surface se compose donc de deux spirales logarithmiques, dont l'angle de la tangente avec le rayon vecteur a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a deux spirales, parce qu'il y a deux asymptotes.

Note. — La même question a été résolue par MM. W.-H. Wisselink et Gambey.