

MORET-BLANC

Question de licence (novembre 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 69-72

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__69_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1874);

PAR M. MORET-BLANC.

Un mobile m attiré vers un point O par une force fonction de la distance se meut de manière qu'il se trouve sur une spirale logarithmique ayant O pour pôle et tournant autour de ce point avec une vitesse angulaire constante donnée; quelle est la loi de la force attractive? Déterminer la nature la plus générale de la trajectoire qu'un mobile peut décrire sous l'influence d'une pareille force.

Soit $r = ae^{m\theta}$ l'équation de la spirale supposée fixe, ω sa vitesse angulaire de rotation; la position du mobile au bout du temps t devra satisfaire à l'équation

$$(1) \quad r = ae^{m(\theta + \omega t)}$$

avec la condition

$$(2) \quad r^2 d\theta = c dt,$$

donnée par le principe des aires, ω étant positif ou négatif suivant que le mobile s'éloigne ou s'approche du pôle.

L'accélération suivant le rayon vecteur est égale à l'excès de la force centrifuge sur l'attraction rapportée à l'unité de masse; cette attraction est donc exprimée par

$$F = r \frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Or

$$r \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3},$$

$$\frac{dr}{dt} = m \left(\frac{d\theta}{dt} + \omega \right) r = m \left(\frac{c}{r} + \omega r \right),$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = m \left(\omega - \frac{c}{r^2} \right) \frac{dr}{dt} = m^2 r \left(\omega^2 - \frac{c^2}{r^4} \right) = m^2 \omega^2 r - \frac{m' c^2}{r^3};$$

par suite,

$$F = \frac{(1 - m^2) c^2}{r^3} - m^2 \omega^2 r.$$

Si l'on fait passer l'axe polaire par la position du mobile à l'époque $t = 0$, a sera la valeur initiale de r , et la composante perpendiculaire au rayon vecteur de la vitesse initiale sera

$$a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = \frac{c}{a},$$

ce qui permet de déterminer c , connaissant cette composante, et réciproquement

Si le mobile s'éloigne du pôle, $\frac{dr}{dt}$ reste positif, et le mouvement continue indéfiniment dans le même sens. Si le mobile s'approche du pôle, ω est négatif,

$$\frac{dr}{dt} = m \left(\frac{c}{r} - \omega r \right);$$

le mobile continuera à s'approcher du pôle tant que l'on aura $r > \sqrt{\frac{c}{\omega}}$. Pour $r = \sqrt{\frac{c}{\omega}}$, $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$.

L'attraction et la force centrifuge se faisant alors équilibre, le mobile restera à la même distance du pôle, autour duquel il tournera avec la vitesse ω ; mais cette espèce d'équilibre sera instable, car une légère impulsion tendant à éloigner le mobile du pôle ferait rentrer dans le premier cas.

Réciproquement, étant donnée la loi d'attraction

$$F = \frac{(1 - m^2) c^2}{r^3} - m^2 \omega^2 r,$$

cherchons la trajectoire.

(71)

On a les deux formules, établies par Newton,

$$v^2 - v_0^2 = - 2 \int_{r_0}^r \mathbf{F} dr,$$

$$v^2 = v^2 \left[\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

La première donne

$$v = v_0^2 + (1 + m^2) c^2 \frac{1}{r^2} + m^2 \omega^2 r^2 - \left[(1 + m^2) c^2 \frac{1}{r_0^2} + m^2 \omega^2 r_0 \right].$$

La seconde donne ensuite

$$\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = m^2 \frac{1}{r^2} - \frac{m^2 \omega^2}{c^2} r^2 - \left[(1 + m^2) \frac{1}{r_0^2} + \frac{m^2 \omega^2}{c^2} r_0^2 - \frac{v_0^2}{c^2} \right],$$

ou en posant, pour abrégér,

$$(1 + m^2) \frac{1}{r_0^2} + \frac{m^2 \omega^2}{c^2} r_0^2 - \frac{v_0^2}{c^2} = 2m^2 h,$$

et faisant $\frac{1}{r} = u$,

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = m^2 \left(u^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{u^2} - 2h \right),$$

$$\frac{u du}{\sqrt{u^4 - 2hu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} = \pm m d\theta$$

ou

$$\frac{2u du}{\sqrt{(u^2 - h)^2 - \left(h^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right)}} = \pm 2m d\theta,$$

et, en intégrant,

$$\frac{u^2 - k + \sqrt{(u^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}}{u_0^2 - k + \sqrt{(u_0^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}} = e^{\pm 2mb},$$

u_0 étant la valeur de u pour $\theta = 0$.

Posons encore

$$u_0^2 - k + \sqrt{(u_0^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = 2a,$$

on aura

$$u^2 - k + \sqrt{(u^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = 2ae^{\pm mb}$$

et, par suite,

$$u^2 - k - \sqrt{(u^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = \frac{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}{2a} e^{\mp 2mb},$$

d'où, en ajoutant ces deux équations et divisant par 2.

$$u^2 = k + ae^{\pm 2mb} + \frac{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}{4a} e^{\mp 2mb}.$$

L'équation de la trajectoire la plus générale que le mobile puisse décrire sous l'influence de la force donnée sera donc

$$\frac{1}{r^2} = k + Ae^{2mb} + Be^{-2mb}.$$

Les constantes k , A , B sont déterminées par les conditions initiales du mouvement, savoir : la distance initiale du mobile au pôle, la grandeur et la direction de la vitesse initiale.