

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 545-562

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_545\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__545_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1196*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 114),

PAR M. MEYL,

Ancien capitaine d'artillerie, à la Haye.

*Résoudre en nombres entiers positifs l'équation*

$$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que  $y$  est un nombre impair ou pair.

1<sup>o</sup>  $y$  un nombre impair. — Mettons l'équation sous la forme

$$(x + 1)^y = [(x + 1) - 1]^{y+1} + 1;$$

on aura, en développant le second membre et désignant par  $P$  un polynôme entier en  $x + 1$ ,

$$(x + 1)^y = P(x + 1) + 2,$$

*Ann. de Mathém.*, 2<sup>e</sup> série, t. XV. (Decembre 1876.)

ce qui montre que  $x + 1$  est diviseur de 2 et par suite  $x$  est 0 ou 1. En substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on trouve que, pour  $x = 0$ ,  $y$  prend pour valeurs tous les nombres impairs et, pour  $x = 1$ , la valeur 1.

2°  $y$  un nombre pair. — Par le développement de l'équation donnée, on obtient, toutes réductions faites et désignant par  $P$  un polynôme entier en  $x$ ,

$$Px + y = x^y,$$

ce qui prouve que  $x$  doit être un diviseur de  $y$ .

Mettons encore l'équation sous la forme

$$(x + 1)^y = [(x + 1) - 1]^{y+1} + 1;$$

développons le second membre, réduisons et nommons  $P$  un polynôme entier en  $x + 1$ ; nous obtiendrons

$$(x + 1)^{y-1} = P(x + 1) + (y + 1);$$

par conséquent  $x + 1$  doit être un diviseur de  $y + 1$ .

Comme  $\frac{y}{x}$  et  $\frac{y+1}{x+1}$  sont des nombres entiers, leur différence l'est encore; posant donc  $\frac{y}{x} - \frac{y+1}{x+1} = E$ , on trouvera

$$\frac{y}{x} = E(x + 1) + 1.$$

Mettons maintenant l'équation proposée sous la forme

$$\left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^y = x + \frac{1}{x^y},$$

et observons que le premier membre a pour limite inférieure  $2^{\frac{y}{x}}$ ; on aura évidemment

$$2^{\frac{y}{x}} \leq x + \frac{1}{x^y},$$

et, en mettant pour  $\frac{y}{x}$  la valeur trouvée plus haut,

$$\begin{aligned} 2^x &= (1 + 1)^{E(x+1)+1} \\ &= \left[ 1 + E(x+1) + 1 + \begin{cases} \text{des nombres positifs} \\ \text{facteurs de E} \end{cases} \right] \leq x + \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

relation qui ne peut subsister que pour  $E = 0$ .

D'après cela, on obtient  $y = x$  et par suite

$$\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = x + \frac{1}{x^2},$$

équation dont on déduit sans peine  $e > x$ ,  $e$  étant la base du système des logarithmes népériens;  $x$  ne peut donc avoir que les valeurs 0 et 2. La première donne pour valeur de  $y$  tous les nombres pairs, la deuxième le nombre 2.

3° *En résumé*, on ne trouve donc que les solutions suivantes :

$$x = 0 \quad \text{avec } y \text{ quelconque,}$$

$$x = 1 \quad \text{» } y = 1,$$

$$x = 2 \quad \text{» } y = 2.$$

*Note.* — Autre solution de M. Moret-Blanc et de M. G. Fontaine, élève du collège d'Anancy.

### Question 1199

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 190 );

PAR M. H. JACOB.

*Enveloppe de la polaire d'un point par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère.* (GAMBEY.)

On pourrait déduire la solution du lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques passant par quatre points, en se servant de la méthode des polaires réciproques.

proques. On peut y arriver directement. Soit, en coordonnées trilinéaires, l'équation d'une conique

$$ax^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0.$$

La condition

$$(1) \quad \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = 0$$

exprime qu'elle est tangente aux quatre droites

$$l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma = 0.$$

Soient  $(\alpha', \beta', \gamma')$  le point donné,  $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$  sa polaire; en identifiant cette équation avec

$$axx' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' = 0,$$

on a

$$a = \frac{\lambda}{\alpha'}, \quad b = \frac{\mu}{\beta'}, \quad c = \frac{\nu}{\gamma'}.$$

En substituant dans la relation (1), on a

$$\frac{l^2 \alpha'}{\lambda} + \frac{m^2 \beta'}{\mu} + \frac{n^2 \gamma'}{\nu} = 0,$$

qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée. Cette équation représente une conique inscrite dans le triangle formé par les diagonales du quadrilatère donné.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. L. Thévenin, élève de l'institution Massin; Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; L. Bourguet; C. Chadu; Leloutre et Portail, élèves du lycée de Lille; B. Launoy; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Barthe et Clautrier, élèves du lycée de Poitiers; H. Lez; Biard, élève du lycée de Lille; Barbarin, élève de l'École Normale; Cl. Talon, élève du lycée de Moulins; A. Minozzi, à Naples. M. Minozzi nous a également adressé la solution de la question 1201 et celle de la question 1205.

## Question 1200

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 190 );

PAR M. MORET-BLANC.

*Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une droite donnée, menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné.* (GAMBEY.)

Prenons la direction donnée pour celle de l'axe des  $x$ . On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant le paramètre  $\mu$  entre l'équation générale des coniques

$$\mu^2 A^2 - \mu (A^2 + B^2 - C^2) + B^2 = 0,$$

et sa dérivée par rapport à  $x$

$$\mu^2 A \cos \alpha - \mu (A \cos \alpha + B \cos \beta - C \cos \gamma) + B \cos \beta = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & A (A \cos \beta - B \cos \alpha) (C \cos \alpha - A \cos \gamma) \\ & + B (B \cos \gamma - C \cos \beta) (A \cos \beta - B \cos \alpha) \\ & + C (C \cos \alpha - A \cos \gamma) (B \cos \gamma - C \cos \beta) = 0, \end{aligned}$$

équation d'une courbe du troisième ordre.

Elle passe par le point de rencontre de chaque côté du triangle des diagonales avec la parallèle à l'axe des  $x$  menée par le sommet opposé.

On a en outre les solutions

$$A^2 = 0, \quad B^2 = 0, \quad C^2 = 0,$$

qui correspondent à  $\mu = \infty$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1$ , et qui représentent trois coniques infiniment aplaties, inscrites au quadrilatère; toute droite les coupe en deux points réunis en un seul.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. H. Jacob;

L. Bourguet ; C. Chadu ; B. Launoy ; Barbarin, élève de l'École Normale, Biard, élève du lycée de Lille.

### Question 1207

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 240) ;

PAR M. DEWULF.

*On joint les trois sommets A, B, C d'un triangle à un point  $P_1$ , et l'on prend les intersections  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des lignes de jonction avec les côtés opposés ; trouver le lieu des points  $P_1$  de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  se coupent en un même point  $P_2$ . Ce lieu est une cubique dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes ; déterminer les asymptotes et trouver aussi le lieu des points  $P_2$ .*

(E. LUCAS.)

Ne considérons d'abord que les sommets B, C du triangle avec leurs côtés opposés. D'après la construction indiquée, à tout point L du plan correspond un seul point L'. Si le point L parcourt une droite  $l$ , les perpendiculaires aux côtés  $b$ ,  $c$  du triangle forment deux faisceaux projectifs (homographiques) et les rayons correspondants se coupent sur une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires, l'une à  $b$ , l'autre à  $c$ .

Ainsi à un point L du plan correspond un seul point L' et à une droite  $l$  correspond une conique.

On arrive à la même conclusion, si l'on ne considère que les sommets A et C avec leurs côtés opposés, ou les sommets A et B avec les côtés  $a$  et  $b$ .

Donc, à toute droite  $l$  du plan correspondent trois coniques que l'on obtient en employant successivement les trois combinaisons deux à deux des sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés. Ces coniques ont leurs asymptotes perpendiculaires à  $b$  et  $c$ , à  $b$  et  $a$ ,

à  $c$  et  $a$ ; elles ont donc, deux à deux, un point commun à l'infini, et les trois autres points communs à deux d'entre elles appartiennent aussi à la troisième.

Sur toute droite  $l$ , il existe donc trois points qui satisfont à la question; en d'autres termes, le lieu des points  $P_1$  est une cubique.

On verrait de la même manière que le lieu des points  $P_2$  est aussi une cubique.

Avant de passer à la détermination de points particuliers, nous dirons quelques mots des coniques dont il vient d'être question.

Chaque combinaison de deux sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés donne lieu à une transformation biquadratique (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 143). Ainsi, en n'employant que les sommets B et C avec leurs côtés opposés  $b$  et  $c$ , à tout point L du plan correspond un seul point L' et à toute droite  $l$  correspond une conique. Mais deux points déterminent une droite; donc deux points doivent suffire pour déterminer la conique correspondante, c'est-à-dire qu'à toutes les droites du plan correspondent toutes les coniques d'un réseau. Ces coniques ont trois points communs: ce sont les points *fondamentaux* de la transformation. Dans le cas qui nous occupe, ces points sont: le point  $H_2$ , intersection des perpendiculaires à AB au point B et à AC au point C, et les deux points à l'infini de ces perpendiculaires.

Les points doubles de cette transformation, c'est-à-dire les points L qui se confondent avec leur point correspondant, sont les sommets A, B, C du triangle donné et le point de rencontre D de ses hauteurs. Ces points doubles se trouvent de la manière suivante: aux droites qui passent par un point L correspondent les coniques qui passent par le point correspondant L'. Ces coniques forment un faisceau projectif au faisceau de droites L.



Le lieu des points d'intersection des rayons  $L$  avec leurs coniques correspondantes forme une cubique. De même le lieu des points d'intersection du rayon d'un faisceau  $M$  avec leurs coniques correspondantes forme une autre cubique. Ces deux cubiques se coupent en neuf points : les trois points fondamentaux et les deux points d'intersection du rayon  $LM$  commun aux deux faisceaux de droites avec la conique correspondante sont au nombre de ces neuf points, les quatre autres sont les points doubles cherchés (\*). Pour la détermination graphique de ces points doubles, il ne faut pas employer des points quelconques  $L$  et  $M$ , mais bien les deux points particuliers  $B$  et  $C$ ; les deux cubiques sont formées alors par les droites  $AC, BD, BH_2$  et  $AB, CD, CH_2$ .

Si l'on fait les transformations qui résultent de l'emploi des sommets  $B$  et  $A$ , ou  $C$  et  $A$ , on obtient encore les mêmes points doubles et les points fondamentaux des trois transformations sont les points  $H_2, M_2, L_2$  ( $H_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $AC$  en  $C$  et à  $AB$  en  $B$ ;  $M_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $CB$  en  $B$  et à  $CA$  en  $A$ , et  $I_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $BC$  en  $C$  et à  $BA$  en  $A$ ), avec les points à l'infini sur les perpendiculaires à  $a, b, c$ .

Si l'on fait la construction inverse, par laquelle on déduit  $P_1$  de  $P_2$ , on obtient encore trois transformations dont les points doubles sont aussi  $A, B, C, D$  et dont les points fondamentaux sont  $A, B, C, F_1, G_1, K_1$  ( $F_1, G_1, K_1$  sont les sommets du triangle que l'on obtient en menant par chacun des sommets de  $ABC$  une parallèle au côté opposé).

---

(\*) La démonstration est tout à fait analogue à celle que donne M. Chasles pour la détermination des points doubles de deux figures homographiques. *Géométrie supérieure*, n° 561)

Ces points fondamentaux et doubles appartiennent aux courbes  $P_1$  et  $P_2$ , comme nous allons le voir. La détermination de quelques points particuliers n'offrant pas de difficultés, nous allons les indiquer dans un tableau à deux colonnes qui donnera la correspondance des points des deux courbes.

<i>Courbe des points <math>P_1</math>.</i>		<i>Courbe des points <math>P_2</math>.</i>	
Les sommets du triangle donné. . .	A	Les sommets du triangle donné. . . A	
Id.	B	Id.	B
Id.	C	Id.	C
Le point de rencontre des hauteurs.	D	Le point de rencontre des hauteurs..	D
Le point de rencontre des médianes.	$E_1$	Le centre du cercle circonscrit. . . . .	$E_2$
Les sommets du triangle $G_1 F_1 K_1$ :			
	$G_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AC menée par $E_1$ (asymptote de $P_2$ ).	
	$F_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à BC menée par $E_2$ (asymptote).	
	$K_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AB menée par $E_2$ (asymptote).	
Le pied de la perpendiculaire abaissée de			
$H_1$ sur BC	$H_1$	$H_2$	
$I_1$ sur AC	$I_1$	$I_2$	
$M_1$ sur AB	$M_1$	$M_2$	
Les points d'intersection des droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit ou avec un des cercles exinscrits :		Les centres des cercles inscrits et exinscrits.	
	$O_1$	$O_2$	
	$O'_1$	$O'_2$	
	$O''_1$	$O''_2$	
	$O'''_1$	$O'''_2$	

Les tangentes en  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $K_1$  sont les droites  $AF_1$ ,  $BG_1$ ,  $CK_1$ .

Les asymptotes de la courbe  $P_1$  peuvent se trouver des deux manières suivantes :

1° Soit  $P_2$  un point de la courbe  $P_2$  qui correspond à un point à l'infini de  $P_1$  ; abaissons les perpendiculaires

$P_2 B'$  sur  $AC$  et  $P_2 C'$  sur  $AB$ . Les droites  $BB'$  et  $CC'$  doivent être parallèles; donc

$$AB' \cdot AC' = AB \cdot AC = \text{const.}$$

La droite  $B'C'$  enveloppe donc une hyperbole tangente à  $BC$  et ayant  $AB$  et  $AC$  pour asymptotes; par suite  $P_2$  engendre une hyperbole déterminée par les deux faisceaux projectifs dont les rayons sont respectivement perpendiculaires à  $AB$  et à  $AC$ . Cette courbe passe donc par  $H_2$  et a pour asymptotes  $AI_2$ ,  $AM_2$ .

Si l'on employait la transformation  $A, C$ , on obtiendrait pour le lieu des points  $P_2$  une hyperbole ayant pour asymptotes  $BH_2$ ,  $BM_2$  et passant par  $I_2$ . Ces deux hyperboles ont un point commun à l'infini; elles se coupent en trois autres points qui sont les points de la courbe  $P_2$  qui correspondent aux points à l'infini de la courbe  $P_1$ .

2° Soit  $Cx$  une des trois directions cherchées. Traçons  $Bx$  parallèle à  $Cx$ ; par  $B'$  et  $C'$  élevons une perpendiculaire à  $AC$  et  $AB$ . Ces perpendiculaires se coupent en un point qui engendre une conique quand la direction  $Cx$  varie. Cette conique n'est autre que celle qui correspond à la droite de l'infini dans la transformation  $BC$ . Les transformations  $AC$  et  $AB$  donnent aussi chacune une conique. Ces trois coniques ont, deux à deux, un des sommets du triangle en commun; les trois autres points d'intersection sont communs aux trois coniques et donnent les trois directions cherchées.

*Remarque I.* — Les points  $H_2, I_2, M_2$  appartiennent à la circonférence circonscrite à  $ABC$ , et ces six points sont les intersections de la cubique  $P_2$  avec cette circonférence.

*Remarque II.* — Les points  $A, B, C, D$  sont communs aux deux courbes  $P_1, P_2$ .

*Remarque III.* — On peut généraliser le problème et opérer sur trois points A, B, C, et trois droites quelconques  $a, b, c$ .

*Note.* — Solutions analytiques par MM. Moret-Blanc; L. Bourguet; P. Sondat.

---

*Question 1209*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 240),

PAR M. LOUIS THUILLIER,

Elève du lycée d'Amiens.

*Deux ellipses sont concentriques ; on leur mène une tangente commune, et l'on joint au centre les points de contact ; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.*

(MANNHEIM.)

D'après le théorème de Desargues, les deux ellipses et le système des cordes communes passant par le centre déterminent sur la tangente commune aux deux ellipses une involution, dont les points doubles sont les points de contact. Les points doubles étant conjugués par rapport à deux points homologues quelconques, le faisceau formé des cordes communes et des droites allant du centre aux points de contact est harmonique.

*Remarque.* — Les deux autres systèmes de cordes communes parallèles rencontrent chacun la tangente commune en deux points conjugués par rapport aux points de contact. Chacun de ces systèmes forme donc, avec les parallèles qu'on lui mène des points de contact, un faisceau harmonique ayant son sommet à l'infini.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Barthe et Clautrier, élèves du lycée de Poitiers; P. Ponsart, élève du lycée de Reims; A. Tourettes; Joseph Narino, élève du lycée de Marseille; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen, Portail et Biard, élèves du lycée de Lille; H. Lez; C. Chadu.

---

## Question 1214

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 288 );

PAR M. BERTHOMIEU,

Élève du lycée de Bordeaux.

*Lieu des centres des coniques touchant une droite en un point donné, et telles qu'un second point donné soit, par rapport à ces coniques, le pôle d'une autre droite aussi donnée.* (GAMBEY.)

*Solution analytique.* — Je prends pour origine des coordonnées le premier point donné, pour axe des  $x$  la première droite, et pour axe des  $y$  une parallèle à la seconde droite.

L'équation générale des coniques tangentes à l'axe des  $x$  à l'origine est

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy = 0.$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées du second point donné, et  $x = \gamma$  l'équation de la seconde droite.

On aura le lieu des centres des coniques (1) en éliminant A, B, C et D entre les quatre relations

$$\begin{aligned} B\alpha + 2C\beta + D &= 0, \\ 2A\alpha\gamma + B\beta\gamma - D\beta &= 0, \\ 2A\alpha + B\gamma &= 0, \\ Bx + 2Cy + D &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières sont les équations du centre, et les deux premières expriment que la droite  $x = \gamma$  a pour pôle le point  $(\alpha, \beta)$ .

Le résultat de l'élimination de A, B, C et D entre ces quatre équations est le déterminant des coefficients de ces paramètres égalé à zéro; telle est donc l'équation du

lieu

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & 1 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 0 & \beta \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant développé fournit pour l'équation du lieu

$$\beta^2 x^2 - \alpha\gamma y^2 + (\beta\gamma - \alpha\beta)xy + \beta(\alpha\gamma y - \beta\gamma x) = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(\beta x - \alpha y)(\gamma y + \beta x - \beta\gamma) = 0,$$

et qui, par conséquent, se décompose en

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0, \\ \gamma y + \beta x - \beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Le lieu des centres se compose donc de deux droites : celle qui joint les deux points donnés et celle qui joint le point de rencontre des deux droites données à celui des parallèles menées par les deux points donnés à chacune de ces droites.

*Solution géométrique.* — La droite qui joint les deux points donnés est la polaire du point de rencontre des droites données. D'autre part, cette même droite est divisée harmoniquement par la conique, le pôle et la polaire donnés; elle rencontre donc la conique en deux points fixes, et la droite qui joint leur point milieu au point de rencontre des droites données doit, d'après une propriété connue, passer par le centre. C'est donc le lieu du centre, puisqu'elle est fixe.

REMARQUE. — On peut se demander d'où provient la solution

$$\alpha y - \beta x = 0,$$

fournie plus haut par le calcul, et que la Géométrie va nous indiquer.

Cette solution correspond au cas où l'équation (1) représente la droite double

$$(\alpha y - \beta x)^2 = 0.$$

Elle satisfait, en effet, à toutes les conditions énoncées. L'origine est un point double, et la droite  $x = \gamma$  peut être considérée comme la polaire du point  $(\alpha, \beta)$ , puisque cette dernière est indéterminée. Or le lieu des centres, dans ce cas, est bien la droite  $\alpha y - \beta x = 0$  elle-même.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Dewulf; Moret-Blanc; C. Chadu; H. Lez; Demartres; Wisslink; G. Lambiotte, élève de l'Athénée royal de Liège; H. Lassenon et A. Devos, élèves du Lycée de Lille; Suffiseau et Augustin, élèves du lycée de Tours; Vincent Fiore, élève de l'Université de Naples; Portail et Leloutre, élèves du lycée de Lille; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; P. Souverain, élève du lycée de Moulins; A. Muffat, élève du lycée de Lyon, qui a généralisé la question; Ed. Guillet, soldat au 38<sup>e</sup> d'infanterie, à Montluçon.

### Question 1215

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 336 );

PAR M. GENTY.

*Si l'on désigne par  $r$ ,  $\rho$  et  $\delta$  le rayon vecteur, le rayon de courbure et l'angle de déviation pour un point d'une courbe, et par  $r_1$ ,  $\rho_1$  et  $\delta_1$  les mêmes éléments pour le point correspondant d'une de ses transformées par rayons vecteurs réciproques, on a la relation*

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \operatorname{tang} \delta = \left(\frac{r'}{\rho'}\right)^2 \operatorname{tang} \delta'. \quad (\text{FOURET.})$$

On sait que l'angle de déviation est donné par la formule

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{d\rho}{3ds}.$$

Soit  $p$  la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à la courbe donnée,  $p_1$  la perpendiculaire abaissée sur la tangente à la courbe transformée,  $a$  le rayon du cercle d'inversion; on a

$$r_1 = \frac{a^2}{r},$$

$$\rho_1 = \frac{r_1 dr_1}{dp_1} = \frac{r_1 dr_1}{d\left(\frac{a^2 p}{r^2}\right)} = -\frac{a^2 \rho}{r^2 - 2p\rho},$$

en remarquant que l'on a

$$\rho dp = r dr;$$

on a ensuite

$$d\rho_1 = -a^2 \frac{r^2 d\rho}{(r^2 - 2p\rho)^2},$$

$$ds_1 = \frac{a^2 ds}{r^2};$$

donc enfin

$$\text{tang } \delta_1 = \frac{d\rho_1}{3 ds_1} = -\frac{r^4 d\rho}{3 ds (r^2 - 2p\rho)^2},$$

et

$$\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^2 \text{tang } \delta_1 = -\frac{a^4 (r^2 - 2p\rho)^2 r^4 d\rho}{3 r^2 d^4 \rho^2 ds (r^2 - 2p\rho)^2}$$

$$= -\frac{r^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{3 ds} = -\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \text{tang } \delta.$$

*Note.* — Solution analogue par M. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa, et M. Moret-Blanc.

### Question 1216

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 336 );

PAR M. P. SONDAT.

*Si, du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole, on décrit un cercle passant par les foyers, ce cercle coupera l'axe perpendiculaire à l'axe focal en deux points*



tels, que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque est constamment égale à la moitié du carré de l'axe focal. (I.EZ.)

Soit

$$y - mx + \sqrt{a^2 m^2 \pm b^2} = 0$$

l'équation d'une tangente quelconque à une conique à centre.

La circonférence concentrique passant par les foyers rencontre l'axe non focal aux points  $C'$ , dont les distances à la tangente sont

$$CD = \frac{c \mp \sqrt{a^2 m^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$C'D' = \frac{-c + \sqrt{a^2 m^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on a

$$\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 = \frac{2(c^2 \pm b^2 + a^2 m^2)}{1 + m^2},$$

ou

$$\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 = 2a^2.$$

C. Q. F. D.

*Note.* — Solutions analogues par MM. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; G. Lambiotte, élève de l'Athénée royal de Liège; Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; J. Griess, à Zurich; Wisselink; A. Minozzi, à Naples; C. Chadu; E. Kruschwitz; Wladimir Habbé; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Δ. Muffat, élève du lycée de Lyon; Joanny Billiet, élève du lycée de Lyon; Wladimir de Tannenbergh, élève de Mathématiques préparatoires au lycée Louis-le-Grand. M. Wladimir de Tannenbergh a également envoyé une solution géométrique.

## Question 1185

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 432 );

PAR M. DEMARTRES,

Professeur au collège de Soissons.

Une surface du second ordre étant circonscrite à un tétraèdre, on mène par un point de la surface une parallèle à l'une des arêtes. Soient  $\rho$ ,  $\rho'$  les segments déterminés sur cette droite par le tétraèdre,  $D$  le diamètre de la surface qui lui est parallèle. Démontrer que l'expression  $\sum \frac{\rho\rho'}{D^2}$ , étendue aux six arêtes, est nulle.

(H. FAURE).

Soient  $a, b, c, d$  les sommets du tétraèdre;  $A, B, C, D$  les faces;  $m$  un point de l'espace;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ses distances aux quatre faces;  $v$  le volume du tétraèdre;  $h_1, h_2, h_3, h_4$  ses hauteurs.

Menons par  $m$  une parallèle à  $ab$ ; cette droite rencontrera les deux faces  $A$  et  $B$ . Soient  $\rho$  et  $\rho'$  les segments comptés à partir de  $m$ . On a évidemment

$$\frac{\rho}{\alpha} = \frac{ab}{h_1}, \quad \frac{\rho'}{\beta} = \frac{ab}{h_2};$$

d'où

$$\rho\rho' = \frac{ab^2}{h_1 h_2} \alpha\beta = \frac{ab^2}{9v^2} AB \alpha\beta.$$

On sait d'ailleurs que, dans tout tétraèdre, on a

$$\frac{\sin(ab)}{ab} = \frac{3v}{2CD},$$

et l'on aura alors

$$\rho\rho' = \frac{2ABCD}{27v^2} ab \alpha\beta \sin(ab).$$

Si l'on ajoute toutes les équations analogues, on aura

$$(1) \quad \Sigma \rho\rho' = \frac{2}{27} \frac{ABCD}{\rho^3} \Sigma \overline{ab} \alpha \beta \sin(ab).$$

Or la seconde somme est le premier membre de l'équation tétraédrique de la sphère circonscrite; donc :

*Pour que  $\Sigma \rho\rho' = 0$ , il faut et il suffit que le point  $m$  soit sur la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Supposons cette condition remplie, et transformons homographiquement la figure de manière que la sphère devienne un ellipsoïde concentrique E. On sait (CHASLES, *Mémoire sur la dualité et l'homographie*) que les segments qui figurent dans une relation homogène doivent être divisés par les diamètres parallèles de l'ellipsoïde; on aura donc

$$\Sigma \frac{\rho\rho'}{D^2} = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE I. — La démonstration est évidemment applicable aux hyperboloïdes, car un ou deux des coefficients de la transformation homographique peuvent être imaginaires.

REMARQUE II. — L'équation précédente peut être considérée comme l'équation même de l'ellipsoïde dans un système particulier de coordonnées; en y remplaçant  $\rho\rho'$  par la valeur (1), on aurait l'équation en coordonnées tétraédriques.

*Note.* — Autre solution par M. Genty.

---