

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 529-545

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

69. On donne deux surfaces du second degré S, S' et deux trièdres $d(\lambda\mu\nu), d'(\lambda'\mu'\nu')$ correspondants par rapport à S , la somme

$$\frac{I_{\lambda\lambda'}}{I_{\lambda\lambda'}} + \frac{I_{\mu\mu'}}{I_{\mu\mu'}} + \frac{I_{\nu\nu'}}{I_{\nu\nu'}} = H$$

sera constante quelles que soient les arêtes $\lambda\mu\nu, \lambda'\mu'\nu'$, pourvu que les sommets d, d' restent fixes.

Soient a, b, c les traces du trièdre d sur le plan polaire du sommet d' et a', b', c' les traces du trièdre d' sur le plan polaire du sommet d , ces plans polaires étant pris par rapport à S . Les tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à cette surface, on a

$$da . d' a' I_{\lambda\lambda'} = I_{ad'} I_{aa'}.$$

D'ailleurs

$$da . d' a' I_{\lambda\lambda'} = I_{aa'} I'_{da'} - I'_{ad'} I_{aa'};$$

par conséquent

$$\frac{I_{\lambda\lambda'}}{I_{\lambda\lambda'}} = \frac{I_{aa'} I'_{da'}}{I_{aa'} I_{dd'}} - \frac{I'_{ad'} I_{da'}}{I_{aa'} I_{dd'}},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les deux autres rapports; d'où résulte

$$H = \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}} \left(\frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bb'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cc'}}{I_{cc'}} \right) - \frac{1}{I_{dd'}} \left(\frac{I'_{ad'} I'_{da'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bd'} I'_{db'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cd'} I'_{dc'}}{I_{cc'}} \right).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481.

Ajoutons et retranchons $\left(\frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}}\right)^2$. La première parenthèse aura pour valeur la quantité K (68); la seconde, d'après (58), aura pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{I_{FF'}}{I'_{FF'}} I'_{dd'}$, en désignant par F, F' les plans polaires des sommets d', d par rapport à la surface S' . Nous déduisons de là

$$H = \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}} \left(K - \frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{I_{FF'}}{I'_{FF'}} \right).$$

On donne deux surfaces du second degré S, S' et deux triangles $abc, a'b'c'$ correspondants par rapport à S' ; si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les côtés de ces triangles, la somme

$$\frac{I_{\alpha\alpha'}}{I'_{\alpha\alpha'}} + \frac{I_{\beta\beta'}}{I'_{\beta\beta'}} + \frac{I_{\gamma\gamma'}}{I'_{\gamma\gamma'}} = L$$

sera constante, quels que soient les côtés de ces triangles, pourvu que leurs plans D, D' restent fixes.

Soient d et d' les pôles des plans D et D' par rapport à S' . Les tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à cette surface; leurs faces étant $A, B, C, D, A', B', C', D'$, nous avons

$$- \frac{\sin DA \sin D'A'}{\pi'^2} I'_{\alpha\alpha'} = I'_{AA'} I'_{DD'};$$

d'ailleurs

$$- \frac{\sin DA \sin D'A'}{\pi^2} I_{\alpha\alpha'} = I_{AA'} I_{DD'} - I_{AD'} I_{DA'};$$

par conséquent

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2} \frac{I_{\alpha\alpha'}}{I'_{\alpha\alpha'}} = \frac{I_{AA'} I_{DD'}}{I'_{AA'} I'_{DD'}} - \frac{I_{AD'} I_{DA'}}{I'_{AA'} I'_{DD'}},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les deux autres

rapports; d'où résulte

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2} L = \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} \left(\frac{I_{AA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BB'}}{I'_{BB'}} + \frac{I_{CC'}}{I'_{CC'}} \right) - \frac{1}{I'_{DD'}} \left(\frac{I_{AD'} I_{DA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BD'} I_{DB'}}{I'_{BB'}} + \frac{I_{CD'} I_{DC'}}{I'_{CC'}} \right).$$

Ajoutons et retranchons $\left(\frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} \right)^2$. La première parenthèse aura pour valeur la quantité $\frac{\pi'^2}{\pi^2} K$; la seconde aura pour valeur $\frac{\pi'^2}{\pi^2} \frac{I'_{ff'}}{I_{ff'}} I_{DD'}$, les points f, f' étant les pôles des plans D' et D par rapport à S . Nous avons par conséquent

$$L = \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} \left(K - \frac{I'_{ff'}}{I_{ff'}} \right).$$

70. On donne deux surfaces du second degré S et S' et deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ polaires réciproques par rapport à S . La somme

$$\sum \frac{I_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = G,$$

étendue aux six couples d'arêtes correspondantes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... est constante, quels que soient les deux tétraèdres.

Considérons, en effet, deux autres tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$ polaires réciproques par rapport à S' ; soient ξ , ξ' deux arêtes correspondantes de ces tétraèdres, η , η' deux autres arêtes correspondantes, η étant l'arête opposée à ξ dans le tétraèdre $xyzt$, η' l'arête opposée à ξ' dans le tétraèdre $x'y'z't'$. Il suit de là que η' est la polaire de ξ et ξ' la polaire de η par rapport à S' . Or on a (§7)

$$I'_{\alpha\alpha} = \sum \frac{I'_{\alpha z'} I'_{\xi\alpha'}}{I'_{\xi\xi'}}, \quad I'_{\beta\beta'} = \sum \frac{I'_{\beta z'} I'_{\xi\beta'}}{I'_{\xi\xi'}}$$

par suite

$$G = \frac{1}{I'_{\xi\xi'}} \sum \frac{I'_{\alpha\xi'} I'_{\xi\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} + \dots$$

Mais (58, 3^o)

$$\sum \frac{I'_{\alpha\xi'} I'_{\xi\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}} I'_{\xi\xi'};$$

donc

$$G = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}},$$

la somme étant étendue aux six couples d'arêtes correspondantes $\eta\eta'$, $\xi\xi'$, ... des deux tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$. La quantité G est, par suite, constante, et l'on obtiendra des valeurs de cette constante en évaluant les sommes $\sum \frac{I'_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}}$ ou $\sum \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}}$ dans divers cas particuliers.

Détermination de G. — Considérons le tétraèdre $oefg$ formé par trois diamètres conjugués oe , of , og de la surface S , les points e , f , g étant à l'infini. Par rapport à cette surface, ce tétraèdre se confond avec son polaire, de sorte que

$$G = \sum \frac{I'_e}{I_e} + \sum \frac{I'_c}{I_c},$$

ε désignant l'une des arêtes de ce tétraèdre qui passe par le centre o , et φ l'une des arêtes situées à l'infini. Or (12)

$$I'_e = -\frac{1}{\varepsilon'^2} - (o', \varepsilon)^2 I'_{E'}, \quad I_c = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

ε' désignant le demi-diamètre de S' parallèle à ε , (o', ε) la distance du centre o' à cette droite et E' le plan diamétral de S' qui passe par ε ; ε est le demi-diamètre de S dirigé suivant ε ; de là résulte

$$\sum \frac{I'_e}{I_e} = \sum \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} + \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 I'_{E'}.$$

Considérons maintenant une des arêtes φ , on a

$$I'_{\varphi} = I'_{\varphi_0} - (o', \varphi)^2 I'_{F'}, \quad I_{\varphi} = I_{\varphi_0} - (o, \varphi)^2 I_F;$$

φ_0 et φ'_0 sont les directions des diamètres de S et S' parallèles à φ , F et F' les plans diamétraux de ces surfaces qui passent par φ ; il suit de là que, quand la droite φ est à l'infini,

$$\frac{I'_{\varphi}}{I_{\varphi}} = \frac{I'_{F'}}{I_F},$$

par conséquent

$$G = \sum \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} + \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 I'_{E'} + \sum \frac{I'_{F'}}{I_F};$$

chaque signe somme contient trois termes.

71. Prenons pour la surface S' une sphère de rayon R

$$I'_{F'} = I'_{F'} = -\frac{1}{R^4},$$

par conséquent

$$G = \frac{S_1^2}{R^2} - \frac{1}{R^4} \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 - \frac{1}{R^4} \sum \frac{1}{I_F},$$

S_1^2 représentant la somme des carrés des demi-axes de la surface S .

D'autre part (24),

$$I'_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos(\alpha, \alpha')}{R^2} + \frac{(o', \alpha)(o', \alpha')}{R^4} \cos \alpha_0,$$

α_0 désignant l'angle formé par les deux plans diamétraux $o'\alpha, o'\alpha'$; par conséquent, on a aussi

$$G = \sum \frac{I'_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = -\frac{1}{R^2} \sum \frac{\cos(\alpha, \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}} + \frac{1}{R^4} \sum \frac{(o', \alpha)(o', \alpha') \cos \alpha_0}{I_{\alpha\alpha'}}.$$

Ces deux valeurs de G étant égales, quel que soit le

rayon R de la sphère, si l'on suppose R infini, on obtient ce théorème :

Deux tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une surface du second degré S , si l'on désigne par α, α' deux arêtes correspondantes, la somme

$$\sum \frac{\cos(\alpha, \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}}$$

relative aux six couples d'arêtes correspondantes est égale et de signe contraire à la somme des carrés des demi-axes de la surface.

72. Dans le théorème (b) (68), supposons que la surface S' est une sphère de rayon R ; si nous désignons par $P_{aa'}$ la puissance du point o' par rapport à la sphère qui a pour diamètre aa' , on sait que

$$I'_{aa'} = \frac{P_{aa'}}{R^2} - 1,$$

de sorte que

$$K = \sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} = \frac{1}{R^2} \sum \frac{P_{aa'}}{I_{aa'}} - \sum \frac{1}{I_{aa'}};$$

or (60)

$$\sum \frac{1}{I_{aa'}} = -1,$$

d'où résulte, à cause de la valeur 1^0 de la constante K ,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - I'_0 R^2 = R^2 + \sum \frac{P_{aa'}}{I_{aa'}};$$

mais

$$I'_0 = \frac{\overline{oo'}}{R^2} - 1;$$

done :

Deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à la surface S , sur les segments correspondants aa', bb', cc', dd' pris pour diamètres on

décrit des sphères; si l'on désigne par $P_{aa'}$, $P_{bb'}$, ... les puissances d'un point arbitraire o' par rapport à ces sphères, on a la relation

$$\frac{P_{aa'}}{I_{aa'}} + \frac{P_{bb'}}{I_{bb'}} + \frac{P_{cc'}}{I_{cc'}} + \frac{P_{dd'}}{I_{dd'}} = S_1^2 - oo'^2,$$

S_1^2 désignant la somme des carrés des demi-axes de la surface S .

73. Si l'on prend pour le point o' le centre de la sphère orthogonale aux quatre sphères aa' , bb' , cc' , dd' , ce point aura la même puissance par rapport à ces quatre sphères, et cette puissance sera égale au carré du rayon R_1 de la sphère orthogonale

$$P_{aa'} = P_{bb'} = \dots = R_1^2;$$

comme d'ailleurs

$$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \dots = -1,$$

nous avons

$$-R_1^2 = S_1^2 - oo'^2, \quad S_1^2 = oo'^2 - R_1^2.$$

Lorsque deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S , la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère orthogonale aux quatre sphères qui ont pour diamètres les segments correspondants.

Ce théorème n'est du reste qu'un cas particulier du suivant. Remarquons que la constante K du théorème (*b*) est nulle lorsque les quatre couples aa' , bb' , cc' , dd' sont conjugués par rapport à la surface S' , puisque alors

$$I'_{aa'} = I'_{bb'} = I'_{cc'} = I'_{dd'} = 0.$$

Nous dirons que la surface S' est conjuguée aux quatre

couples de points correspondants aa' , bb' , cc' , dd' lorsque ces conditions seront remplies.

En ayant égard à la valeur 1^o de la constante K , nous aurons ce théorème :

74. *Lorsque deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à la surface S , si l'on trace une seconde surface S' conjuguée aux quatre couples de points correspondants aa' , bb' , cc' , dd' , l'indice du centre de S par rapport à S' sera égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de S par les diamètres de S' respectivement parallèles.*

Si l'on prend pour S' une sphère, on retombe sur le théorème énoncé ci-dessus. Lorsque S est une sphère, on a celui-ci :

75. *Deux tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une sphère, si l'on trace une seconde surface S' conjuguée aux quatre couples de sommets correspondants de ces tétraèdres, la somme des carrés des inverses des demi-axes de S' est égale à l'indice du centre de la sphère par rapport à S' divisé par le carré du rayon de la sphère.*

76. Considérons les deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ polaires réciproques par rapport à la surface S , ainsi que la sphère S' orthogonale aux quatre sphères qui ont pour diamètres les segments correspondants aa' , bb' , cc' , dd' . D'après le théorème, cette sphère S' coupe orthogonalement la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces touchent la surface S . Soit m un point de la courbe d'intersection de la surface S avec la sphère S' ; appelons φ et θ les angles que forme le demi-diamètre om

de S avec cette surface et avec la sphère S' . Le point o' étant le centre de cette sphère et r son rayon, on a

$$\overline{oo'}^2 = r^2 + S_1^2,$$

S_1^2 désignant la somme des carrés des demi-axes de S . Le triangle omo' donne

$$\overline{oo'}^2 = \overline{om}^2 + r^2 - 2r \cdot om \cos \theta = \overline{om}^2 + r^2 + 2r \cdot om \sin \theta;$$

par conséquent

$$S_1^2 - \overline{om}^2 = 2r \cdot om \sin \theta.$$

Mais, si ρ et ρ' sont les rayons de courbure principaux de la surface S au point m , M le plan tangent à cette surface au point m , on sait que

$$\rho + \rho' = \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{(o, M)};$$

d'où, à cause de la relation précédente,

$$\rho + \rho' = \frac{2r \cdot om \sin \theta}{(o, M)} = 2r \frac{\sin \theta}{\sin \varphi},$$

puisque

$$(o, M) = om \sin \varphi.$$

Prolongeons le demi-diamètre om en n , où il rencontre de nouveau la sphère S' , on a

$$mn = 2r \sin \theta;$$

menons au point n un plan perpendiculaire à omn , et soit p le point où ce plan coupe la normale au point m de la surface S , on a

$$mn = mp \sin \varphi,$$

et, par suite,

$$mp = \frac{mn}{\sin \varphi} = 2r \frac{\sin \theta}{\sin \varphi};$$

il en résulte que mp représente la somme des rayons de courbure $\rho + \rho'$.

On donne une surface du second degré S et une sphère S' qui coupe orthogonalement la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces touchent S . Le point m étant un point d'intersection des surfaces S et S' , tracez le diamètre om de S et soit n le point où ce diamètre rencontre de nouveau la sphère S' . Le plan mené au point n perpendiculairement à ce diamètre coupera la normale en m de la surface en un point p tel que la longueur mp est égale à la somme des rayons de courbure principaux de la surface S au point m .

Il suit de là que, si la sphère S' touche la surface S au point m , son diamètre sera égal à la somme des rayons de courbure principaux de la surface au point m .

77. Considérons deux tétraèdres $ABCD$, $A'B'C'D'$ polaires réciproques par rapport à la surface S . D'après la relation (c), le point o' étant le centre d'une seconde surface S' du second degré, on a

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = \left(\frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + \frac{\beta'^2}{\beta^2} + \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} - I' \right) \frac{\pi^2}{\pi'^2};$$

α' , β' , γ' sont trois demi-diamètres conjugués de S' ; α , β , γ les demi-diamètres de S respectivement parallèles. Prenons pour S' une sphère de rayon R ,

$$I'_{AA'} = \frac{(o', A)(o', A')}{R^3} - \frac{\cos(A, A')}{R};$$

par conséquent

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = \frac{1}{R^3} \sum \frac{(o', A)(o', A')}{I_{AA'}} - \frac{1}{R} \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}}.$$

Or (55)

$$\sum \frac{(o', A)(o', A')}{I_{AA'}} = -\pi^2 I_{o'},$$

d'où résulte

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = -\frac{\pi^2}{R^6} I_{o'} - \frac{1}{R^4} \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}},$$

et par suite, en désignant par $\frac{1}{S^2}$ la somme des carrés des inverses des demi-axes de S,

$$-\frac{\pi^2}{R^6} I_{o'} - \frac{1}{R^4} \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = \frac{\pi^2}{R^4} \frac{1}{S^2} - \frac{\pi^2}{R^6} I_{o'}.$$

On donne deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une surface S; la somme $\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}}$, que l'on obtient en divisant le cosinus de l'angle formé par chaque couple de faces correspondantes par l'indice du système de ces faces, est égale et de signe contraire à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface S.

78. La notion de la sphère adjointe au système de deux plans permet de donner un énoncé différent à ce théorème, exprimé par la relation

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = -\frac{\pi^2}{S^2}.$$

Construisons les sphères adjointes aux quatre systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD', relatives à un point arbitraire f , ainsi que la sphère orthogonale à ces quatre sphères. Soit m le centre de cette dernière; la puissance de ce point par rapport à l'une quelconque des quatre sphères est égale au carré du rayon R_1 de la sphère orthogonale; mais, à l'aide de la relation (66), nous pouvons obtenir une autre expression de cette

puissance. Ainsi, par rapport à la sphère adjointe au système des plans AA' , nous devons avoir

$$\begin{aligned} & (R_1^2 - \overline{fm}^2) \cos(A, A') \\ & = - (f, A) (f, A') + (f, A) (m, A') + (f, A') (m, A). \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs $\overline{fm}^2 - R_1^2$ représente la puissance P_f du point f par rapport à la sphère orthogonale, nous avons

$$\cos(A, A') = \frac{1}{P_f} [(f, A) (f, A') - (f, A) (m, A') - (f, A') (m, A)],$$

et l'on aurait des expressions analogues pour $\cos(B, B')$, $\cos(C, C')$, $\cos(D, D')$.

De là résulte

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} \\ & = \frac{1}{P_f} \left[\sum \frac{(f, A) (f, A')}{I_{AA'}} - \sum \frac{(f, A) (m, A')}{I_{AA'}} - \sum \frac{(f, A') (m, A)}{I_{AA'}} \right]. \end{aligned}$$

Or (§5)

$$\begin{aligned} & \sum \frac{(f, A) (f, A')}{I_{AA'}} = -\pi^2 I_f, \\ & \sum \frac{(f, A) (m, A')}{I_{AA'}} = \sum \frac{(f, A') (m, A)}{I_{AA'}} = -\pi^2 I_{f_m}; \end{aligned}$$

donc

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = \frac{\pi^2}{P_f} (-I_f + 2I_{f_m}) = -\frac{\pi^2}{S^2}$$

ou bien

$$I_f - 2I_{f_m} = \frac{P_f}{S^2}.$$

Soit F le plan polaire du point f par rapport à la surface S , on a

$$\frac{I_{mf}}{I_f} = \frac{(m, F)}{(f, F)}.$$

Si g est le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur le plan F ,

$$(m, F) = mg \cos fgm,$$

de sorte que

$$\frac{2I_{mf}}{I_f} = \frac{2mg \cdot fg \cos fgm}{fg^2}$$

et

$$\frac{P_f}{S^2} = I_f \left(1 - \frac{2mg \cdot fg \cos fgm}{fg^2} \right).$$

Le triangle $fm g$ donne

$$\overline{mf}^2 = \overline{mg}^2 + \overline{fg}^2 - 2mg \cdot fg \cos fgm;$$

par conséquent

$$\frac{P_f}{S^2} = I_f \left(1 - \frac{\overline{mg}^2 + \overline{fg}^2 - \overline{mf}^2}{fg^2} \right) = I_f \left(\frac{\overline{mf}^2 - \overline{mg}^2}{\overline{fg}^2} \right).$$

Or, si l'on désigne par P_g la puissance du point g par rapport à la sphère orthogonale dont le centre est au point m ,

$$\overline{mf}^2 - \overline{mg}^2 = P_f - P_g,$$

et par suite

$$\frac{1}{S^2} = \frac{I_f}{\overline{fg}^2} \left(1 - \frac{P_g}{P_f} \right);$$

par conséquent :

Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S du second degré; on construit par rapport à un point arbitraire f les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants AA' , BB' , CC' , DD' et la sphère orthogonale à ces quatre sphères. Si l'on désigne par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur son plan polaire (relatif à la surface S), la somme des carrés des inverses des demi-axes

de la surface sera donnée par l'expression

$$\frac{I_f}{f_g^2} \left(1 - \frac{P_g}{P_f} \right),$$

dans laquelle P_g et P_f sont les puissances des points g et f par rapport à la sphère orthogonale.

Lorsque le point f se confond avec le centre de la surface S , son plan polaire est à l'infini :

$$\frac{1}{f_g^2} = 0, \quad \frac{P_g}{f_g^2} = 1 \quad \text{et} \quad I_f = -1.$$

79. Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S du second degré ; on construit par rapport au centre de la surface les quatre sphères adjointes aux systèmes des plans correspondants et la sphère orthogonale à ces quatre sphères ; la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface sera égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à la sphère orthogonale.

80. D'après le théorème (68), si nous considérons quatre couples de plans correspondants AA' , BB' , CC' , DD' par rapport à la surface S , déterminant les tétraèdres $ABCD$, $A'B'C'D'$ polaires réciproques à cette surface, on a, I' désignant les indices pris par rapport à une seconde surface S' ,

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2} \sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + \frac{\beta'^2}{\beta^2} + \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} - I_{o'};$$

α' , β' , γ' sont trois demi-diamètres conjugués de S' ; α , β , γ les demi-diamètres de S parallèles, et o' le centre de S' .

Le premier membre de cette relation est nul lorsque

les quatre couples de plans AA' , BB' , CC' , DD' sont conjugués par rapport à la surface S' , puisqu'alors

$$I_{AA'} = I_{BB'} = I_{CC'} = I_{DD'} = 0.$$

Nous dirons dans ce cas que la surface S' est conjuguée aux quatre couples de plans AA' , BB' , CC' , DD' . On a donc ce théorème :

Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S ; si l'on trace une seconde surface S' conjuguée aux quatre couples de faces correspondantes, l'indice du centre de S' par rapport à S sera égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de S' par les diamètres de S respectivement parallèles.

Comme conséquences des théorèmes précédents, nous indiquerons les deux suivants, qui nous seront utiles dans la suite. Leurs démonstrations directes sont d'ailleurs des plus faciles.

81. *On donne une surface du second degré S et deux points d , d' ; par le point d on mène trois plans rectangulaires A , B , C , et par le point d' trois plans A' , B' , C' parallèles aux premiers, la somme*

$$I_{AA'} + I_{BB'} + I_{CC'}$$

est constante quelle que soit la direction des trois plans; la constante a pour valeur $\frac{P_0 - S_1^2}{\pi^2}$, P_0 étant la puissance du centre o de la surface S par rapport à la sphère qui a pour diamètre dd' , S_1^2 la somme des carrés des demi-axes de S , et π^2 le produit des carrés de ces mêmes demi-axes.

Imaginons la sphère S' de rayon r , qui a pour centre

le point d , et soit D le plan polaire du point d' par rapport à cette sphère; le tétraèdre $ABCD$ aura pour polaire $A'B'C'D'$, le plan D' étant à l'infini. Nous avons donc

$$\frac{I_{AA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BB'}}{I'_{BB'}} + \frac{I_{CC'}}{I'_{CC'}} + \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} = \frac{r^6}{\pi^2} \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{r^2} - I'_o \right);$$

mais

$$I'_{AA'} = I'_{BB'} = I'_{CC'} = -\frac{I}{r^4}, \quad I_{DD'} = \frac{(o, D')(o, D)}{\pi^2},$$

$$I'_{DD'} = \frac{(d, D)(d', D')}{r^6},$$

de sorte que, le plan D' étant à l'infini,

$$\frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} = \frac{r^6}{\pi^2} \frac{(o, D)}{(d, D)};$$

de là résulte la relation

$$\pi^2 (I_{AA'} + I_{BB'} + I_{CC'}) = -S_1^2 + r^2 \left[I'_o + \frac{(o, D)}{(d, D)} \right];$$

mais

$$\frac{(o, D)}{(d, D)} = -I'_{od'},$$

et, puisque $I'_{do} = I'_{dd'} = -1$, on peut écrire

$$I'_o + \frac{(o, D)}{(d, D)} = - \begin{vmatrix} I'_{oo} & I'_{od'} \\ I'_{do} & I'_{dd'} \end{vmatrix} = -od.od'I'_{\delta\delta'},$$

δ et δ' désignant les directions od , od' ; or, dans la sphère,

$$I'_{\delta\delta'} = -\frac{\cos(\delta, \delta')}{r^2},$$

et, comme $od.od' \cos(\delta, \delta')$ est la puissance du point o par rapport à la sphère qui a pour diamètre dd' , le théorème est démontré.

COROLLAIRE. — On donne une surface du second degré S et un point d ; si par ce point on mène trois plans rectangulaires A, B, C , on a

$$I_A + I_B + I_C = \frac{\overline{od}^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

o étant le centre de la surface.

La somme des indices est nulle lorsque $\overline{od}^2 = S_1^2$, c'est-à-dire lorsque le point d est sur la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à la surface S .

(A suivre.)