

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 511-528

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__511_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 65

(voir 1^{re} série, t. II, p. 326);

PAR M. A. LAISANT.

Connaissant les coordonnées des trois sommets d'un triangle, quelles relations doivent exister entre ces coordonnées et celles d'un quatrième point, pour que celui-ci soit dans l'intérieur du triangle?

Pour que le quatrième point P soit situé dans l'intérieur du triangle ABC, il faut et il suffit qu'il puisse être le centre de gravité de trois masses positives m_1, m_2, m_3 , respectivement appliquées en A, B, C; nous avons donc l'équipollence, applicable à l'espace,

$$(m_1 + m_2 + m_3) \text{OP} \stackrel{\text{e}}{=} m_1 \text{OA} + m_2 \text{OB} + m_3 \text{OC}$$

ou

$$(1) \quad OP \stackrel{\Delta}{=} \lambda_1 OA + \lambda_2 OB + \lambda_3 OC,$$

les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant positifs et assujettis à la condition

$$(2) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A, par x_2, y_2, z_2 celles de B, par x_3, y_3, z_3 celles de C, et par ξ, η, ζ celles de P, l'équipollence (1) tient lieu des trois équations

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ \eta = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \\ \zeta = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3. \end{cases}$$

Si donc on résout ce dernier système d'équations par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les relations demandées consistent dans la relation (2) et dans les suivantes :

$$(4) \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul, de voir comment il se simplifie lorsqu'il s'agit d'un triangle situé dans un plan déterminé, d'étendre le problème à un tétraèdre, puis à un polygone ou à un polyèdre quelconque.

Question 505

(voir 1^{re} série, t. XIX, p. 44);

PAR M. H. BROCARD.

On connaît les levers et les couchers du Soleil en temps moyen à Paris; en déduire les mêmes données pour le 1^{er} de chaque mois de 1860 à Alger.

La solution complète de cette question fait l'objet d'une

brochure in-16, de 32 pages, intitulée : « *Calendrier algérien pour 1853, ou tableaux du lever et du coucher du Soleil calculés pour toute l'Algérie, accompagnés de l'équation du temps*, par M. E. Renou, membre titulaire de la Commission scientifique », et aujourd'hui directeur de l'Observatoire météorologique du Parc-Saint-Maur, et secrétaire de la Société météorologique de France.

L'auteur fait précéder son travail d'une Notice explicative, dans laquelle il dit : « Notre tableau suffit pour avoir l'heure à une demi-minute près pendant vingt-cinq ou trente ans. » Ce tableau répond ainsi, d'une manière complète, à la question proposée.

Il donne :

1^o Les heures du lever et du coucher du Soleil (avec les minutes et les secondes) à Alger, pour tous les jours de l'année 1853 ;

2^o Les mêmes éléments à Oran, à Tlemcen, et à 32 degrés de latitude pour les 1^{er}, 11 et 21 de chaque mois ;

3^o L'équation du temps pour tous les jours de l'année.

L'utilité de tableaux de ce genre est clairement démontrée par la possibilité qu'ils donnent :

1^o De régler les montres et les horloges ;

2^o De régler les heures d'éclairage et de travail des ouvriers dans les villes, les administrations des chemins de fer, le service des phares, etc. :

3^o De régler tous les détails de l'installation et du tracé des cadrans solaires.

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* ne répond pas, d'une manière suffisante, à ces divers *desiderata*.

On y trouve, pages 49 et 50, une Table de corrections pour les levers et les couchers du Soleil, pour les jours

de l'année de 10 en 10, et pour les latitudes de 43 degrés à 51 degrés, qui sont les latitudes extrêmes de la France. Pourquoi un tableau d'une aussi évidente utilité n'a-t-il pas été depuis longtemps étendu à toutes les latitudes et en particulier à celle de l'Algérie, notre colonie la plus voisine de la France et aussi la plus importante ?

Quoi qu'il en soit, la solution de la question qui nous occupe réside essentiellement dans les nombres du tableau suivant :

Temps moyen d'Alger.

1 ^{er} du mois.	Lever	Coucher
	^h ^m ^s	^h ^m ^s
Janvier	7.15. »	4 53.30
Fevrier	7. 4. »	5.24 .
Mars	6.32.30	5.53.
Avril	5 47.30	6.21 »
Mai	5. 7.30	6.46.30
Juin	4.44. »	7.11.30
Juillet	4.45 30	7.21. .
Août	5. 6.30	7 5
Septembre	5.32 »	6.27.
Octobre	5.56.30	5.42. .
Novembre	6.25. »	5. 2.
Decembre	6.56	4.42.30

Question 1142

(voir 2^e serie, t XIII, p 303),

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données deux droites non situées dans un même plan, les paraboloides hyperboliques qui passent par ces deux droites ont tous un plan directeur commun, trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs passent par une troisième droite donnée non parallèle au plan des deux pre-

mières. Trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs forment avec le premier un angle donné. (DEWULF.)

J'emploie les axes et les notations de la question 1122 (voir 2^e série, t. XIII, p. 444).

1^o Soient

$$x = az, \quad y = bz$$

les équations de la troisième droite, que l'on peut, sans diminuer la généralité de la question, supposer menée par l'origine. Les coefficients A, B, C du second plan directeur satisferont à la condition

$$Aa + Bb + C = 0.$$

On a trouvé, pour équation générale des hyperboloïdes passant par les deux premières droites,

$$(1) \quad Cmz^2 + Bmyz + Amxz - Bm^2cx - Acy - Cmc^2 = 0;$$

avec les conditions, pour déterminer les sommets,

$$(2) \quad mz(A^2 + B^2) - (m^2 + 1)cAB = 0,$$

$$(3) \quad Ax + By + 2Cz = 0,$$

auxquelles il faut joindre ici

$$(4) \quad Aa + Bb + C = 0.$$

En éliminant A, B, C entre les trois premières équations, on a l'équation déjà trouvée du conoïde

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [m^2z^3 + (m^2 + 2)c^2z]y^2 - m(m^2 + 1)(3cz^2 + c^2)xy \\ \quad + [m^2z^3 + (m^2 + 2m^4)c^2z]x^2 = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on élimine ces mêmes variables entre les équations (2), (3), (4), on obtient l'équation d'une seconde surface sur laquelle sont les sommets

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} mz[(x - 2az)^2 + (y - 2bz)^2] \\ \quad + (m^2 + 1)c(x - 2az)(y - 2bz) = 0. \end{array} \right.$$

C'est encore un conoïde ayant pour plan directeur le plan xOy et pour axe la droite

$$x = 2az, \quad y = 2bz.$$

Le lieu cherché est l'intersection des deux conoïdes. Il sera facile d'en construire l'épure.

2° Soient A, B, C les cosinus des angles que la normale au second plan directeur fait avec les axes Ox, Oy, Oz , C étant une constante donnée.

Il faut aux équations (1), (2), (3) joindre la suivante :

$$A^2 + B^2 = 1 - C^2,$$

ou bien

$$(7) \quad mz(1 - C^2) - (m^2 + 1)cAB = 0,$$

qui résulte de sa combinaison avec l'équation (2).

En éliminant A et B entre les trois premières, on obtient l'équation du conoïde (5).

Éliminant ces mêmes variables entre les équations (1), (3) et (7), on obtient celle d'une seconde surface sur laquelle sont les sommets :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} mcz(1 - C^2)(y^2 - m^2x^2)^2 \\ + (m^2 + 1)(mzy^2 - 2m^2cxz + mc^2y) \\ \times (mzx^2 - 2cyzm^2cx) = 0. \end{array} \right.$$

Le lieu de sommets est la courbe d'intersection des surfaces (5) et (8). L'axe des z en fait évidemment partie.

Question 1154

(voir 2^e série, t. XIII, p. 111),

PAR M. GAMBEY.

L'énoncé de la question 1154 se trouve dans un article publié dans ce journal, par M. Laguerre, sous le titre de « *Recherches analytiques sur la surface du*

troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner » (voir 2^e série, t. XI, p. 342, th. II), et il y figure comme corollaire de ce qui précède. Je vais signaler les parties de cet article qui ont le rapport le plus direct avec la solution de la question proposée.

Soient a, b, c, d, e cinq fonctions linéaires de x, y, z que nous regarderons comme les coordonnées pentadiques d'un point, et la fonction

$$u = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e,$$

où t est un paramètre variable.

Si l'on fait varier ce paramètre, le plan représenté par l'équation $u = 0$ enveloppe une surface développable du sixième ordre dont l'équation s'obtient en égalant à zéro le discriminant de u . Or ce discriminant peut s'exprimer (voir SALMON, *Algèbre supérieure*) en fonction des deux invariants de u . Ces invariants sont

$$i = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de la surface, enveloppe du plan $u = 0$, peut s'écrire ainsi

$$i^3 - 27j^2 = 0.$$

De la forme de cette équation on déduit que l'arête de rebroussement de cette développable, dont les équations sont

$$i = 0, \quad j = 0,$$

est l'une des asymptotiques de la surface du troisième ordre représentée par

$$j = 0.$$

Or cette surface est justement la réciproque de la surface romaine de Steiner, la surface directrice étant la quadrique représentée par $i = 0$.

Cela posé, M. Laguerre démontre que le cône circonscrit à cette surface et dont le sommet est un point de cette surface se décompose en deux cônes du second ordre. Il emploie pour cela des transformations fondées sur les propriétés des invariants et des covariants; mais on peut arriver à ce résultat d'une autre manière.

Cette décomposition est, en effet, une conséquence directe de cette propriété, caractéristique de la surface de Steiner, *d'être coupée par un plan tangent quelconque suivant deux coniques*, et comme cette même surface admet *quatre plans tangents la touchant suivant des coniques doubles*, on peut ajouter que sa réciproque admet quatre points pour lesquels les cônes circonscrits, ayant ces points pour sommets, sont des cônes doubles du second ordre.

Au cours de l'article en question, on trouve ensuite démontré que la courbe de contact de chacun de ces cônes est une cubique gauche, arête de rebroussement d'une certaine développable, ε , ayant pour équation

$$ju - iH = 0,$$

H étant le hessien de u , savoir

$$(at^2 + 2bt + c)(ct^2 + 2dt + e) - (bt^2 + 2ct + e)^2.$$

La forme de cette équation montre que l'asymptotique

$$i = 0, \quad j = 0$$

est située sur la surface ε , ce qu'il s'agissait de démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Bourguet.

Question 1157

(voir 2^e série, t. XIV, p. 95) :

PAR M. H. DURRANDE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Étant donné un système quelconque de points matériels et deux droites fixes dans l'espace, on demande le lieu des droites qui rencontrent les deux droites fixes et qui sont axes principaux d'inertie par rapport à un de leurs points. Lieu de ce point. On examinera, en particulier, le cas où l'une des droites fixes passe par le centre de gravité du système, et aussi le cas où l'une de ces droites est axe principal d'inertie relativement au centre de gravité. (F. DIDON.)

I.

Si la droite dont on cherche le lieu géométrique est prise pour axe des z' , et si, de plus, le plan des $z'x'$ contient le centre de gravité, on sait que la condition nécessaire pour que cette droite soit un axe principal d'inertie en un de ses points est, en désignant par m la masse d'un des points matériels, par x', y', z' ses coordonnées,

$$(1) \quad \Sigma m y' z' = 0,$$

et que, si a est l' x' du centre de gravité, et h la distance à l'origine du point pour lequel l'axe des z' est principal, on a la relation

$$(2) \quad M a h = \Sigma m x' z',$$

M étant la masse totale du système. Pour plus de simplicité, je la supposerai égale à l'unité.

Avant de m'occuper de la question proposée, je vais d'abord traduire géométriquement ces deux relations

importantes. Pour cela, je rapporte le système aux trois axes principaux relatifs au centre de gravité; les coordonnées (x', y', z') d'un point quelconque s'exprimeront en fonction des nouvelles (x, y, z) par des relations de la forme

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta', \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'', \end{aligned}$$

et comme, par hypothèse, le centre de gravité, qui est la nouvelle origine, était dans le plan des $z'x'$, et même si l'on veut sur l'axe des x' , on en conclut

$$\delta = a, \quad \delta' = 0, \quad \delta'' = 0.$$

Les formules de transformation sont donc

$$(3) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + a, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Les équations de la droite mobile (ancien axe des z') sont

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + a = 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0, \end{cases}$$

et il est bien entendu que les deux systèmes d'axes coordonnés étant rectangulaires, les neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ sont liés par les relations connues.

La relation (1), qui exprime que la droite est un axe principal d'inertie en un point indéterminé, peut s'écrire maintenant ainsi

$$\Sigma m (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) = 0.$$

et, à cause du choix des axes actuels,

$$\Sigma m y z = 0, \quad \Sigma m z x = 0, \quad \Sigma m x y = 0$$

Soient A, B, C les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité, c'est-à-dire

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

et P le moment d'inertie polaire, ou $A + B + C$.

La relation précédente peut alors s'écrire

$$(P - A) \alpha' \alpha'' + (P - B) \beta' \beta'' + (P - C) \gamma' \gamma'' = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(5) \quad A \alpha' \alpha'' + B \beta' \beta'' + C \gamma' \gamma'',$$

en tenant compte de la relation

$$(6) \quad \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'' = 0,$$

qui est une de celles qui lient les neuf cosinus.

Nous pouvons éliminer α' , β' , γ' entre la seconde des équations (4) et les équations (5) et (6); le résultat de cette élimination est

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ A \alpha'' & B \beta'' & C \gamma'' \end{vmatrix} = 0;$$

(ξ , η , ζ) désignant les coordonnées d'un point particulier de la droite mobile, ses équations peuvent se mettre sous la forme

$$(8) \quad \frac{x - \xi}{\alpha''} = \frac{y - \eta}{\beta''} = \frac{z - \zeta}{\gamma''} = \rho;$$

si l'on élimine α'' , β'' , γ'' entre ces équations et la relation (7), celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ A(x - \xi) & B(y - \eta) & C(z - \zeta) \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation est identiquement vérifiée en faisant

$$\frac{(x - \xi)}{\rho} = P \frac{\xi}{A + \lambda}, \quad \frac{(y - \eta)}{\rho} = P \frac{\eta}{B + \lambda},$$

$$\frac{(z - \zeta)}{\rho} = P \frac{\zeta}{C + \lambda},$$

ce qui montre que les cosinus des angles que fait la droite avec les axes doivent être proportionnels à

$$\frac{\xi}{A + \lambda}, \quad \frac{\eta}{B + \lambda}, \quad \frac{\zeta}{C + \lambda}.$$

Or, si l'on considère l'équation

$$\frac{\xi^2}{A + \lambda} + \frac{\eta^2}{B + \lambda} + \frac{\zeta^2}{C + \lambda} = 1,$$

qui représente une surface homofocale de l'ellipsoïde inverse des moments, on peut énoncer le résultat précédent en disant que, *pour être axe principal d'inertie en un de ses points, la droite doit être normale à une des surfaces homofocales de l'ellipsoïde inverse des moments au point où elle rencontre cette surface.*

La seconde équation de condition (2) s'exprime en fonction des nouvelles coordonnées par l'équation

$$ah = \sum m (\alpha x + \beta y + \gamma z + a) (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z);$$

soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point pour lequel la droite est axe principal; la relation précédente, en tenant compte de ce que a est l' x' du centre de gravité, et h le z' du point que nous cherchons, devient

$$(9) \quad \begin{cases} (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1) (\alpha'' \xi_1 + \beta'' \eta_1 + \gamma'' \zeta_1) \\ = A \alpha \alpha'' + B \beta \beta'' + C \gamma \gamma''; \end{cases}$$

le point (ξ_1, η_1, ζ_1) étant sur la droite représentée par

les équations (8), on a

$$\alpha'' = \frac{\xi_1 - \xi}{\rho} = p \frac{\xi}{A + \lambda}, \quad \beta'' = \frac{\eta_1 - \eta}{\rho} = p \frac{\eta}{B + \lambda},$$

$$\gamma'' = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho} = p \frac{\zeta}{C + \lambda};$$

en portant les valeurs de α'' , β'' , γ'' dans le second facteur du premier membre de l'équation (9), ce facteur devient

$$p \left(\frac{\xi\xi_1}{A + \lambda} + \frac{\eta\eta_1}{B + \lambda} + \frac{\zeta\zeta_1}{C + \lambda} \right);$$

si, au contraire, on exprime ξ_1 , η_1 , ζ_1 au moyen de α'' , β'' , γ'' , on a

$$\xi_1 = \xi + \rho\alpha'' = \left[\frac{1}{p}(A + \lambda) + \rho \right] \alpha'', \dots,$$

et le premier facteur de (9) devient, après réductions,

$$\frac{1}{p}(A\alpha\alpha'' + B\beta\beta'' + C\gamma\gamma'');$$

donc l'équation (9) devient

$$(10) \quad \frac{\xi\xi_1}{A + \lambda} + \frac{\eta\eta_1}{B + \lambda} + \frac{\zeta\zeta_1}{C + \lambda} = 1,$$

ce qui montre que le point (ξ_1, η_1, ζ_1) , qui était déjà sur la normale à la surface homofocale de l'ellipsoïde inverse des moments, est en outre dans le plan tangent à cette même surface; donc c'est le point de contact lui-même.

En d'autres termes : *Toute droite qui est un axe principal d'inertie en un de ses points est normale à une des trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde inverse des moments qui passent en ce point.*

Revenons maintenant à la question proposée.

Nous avons à exprimer qu'une droite, dont les équations sont données sous la forme (8), rencontre deux droites fixes ayant pour équations

$$(D) \quad \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu},$$

$$(D') \quad \frac{x - x'_0}{\lambda'} = \frac{y - y'_0}{\mu'} = \frac{z - z'_0}{\nu'},$$

ou bien

$$(D) \quad \begin{cases} \mu z - \nu y - \lambda_0 = 0, \\ \nu x - \lambda z - \mu_0 = 0, \\ \lambda y - \mu x - \nu_0 = 0; \end{cases} \quad (D') \quad \begin{cases} \mu' z - \nu' y - \lambda'_0 = 0, \\ \nu' x - \lambda' z - \mu'_0 = 0, \\ \lambda' y - \mu' x - \nu'_0 = 0. \end{cases}$$

Désignons par X, Y, Z les trois fonctions linéaires qui forment les premiers membres des équations (D), et par X', Y', Z' les fonctions analogues pour (D').

L'équation

$$(11) \quad \alpha'' X + \mu Y + \nu Z = 0$$

représente évidemment un plan passant par la droite (D) et parallèle à la direction $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, à cause de la symétrie des coefficients angulaires en (λ, μ, ν) et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$; donc, si l'on convient de regarder X, Y, Z comme les résultats que l'on obtient en substituant les coordonnées d'un point quelconque de la droite mobile [de direction $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$] dans les premiers membres de (D), l'équation (11) devient une équation de condition, exprimant précisément qu'il y a rencontre entre la droite mobile et la droite (D).

Pareillement l'équation

$$(12) \quad \alpha'' X' + \beta'' Y' + \gamma'' Z' = 0$$

exprime la rencontre de la droite mobile et de la droite (D').

Donc enfin, si l'on appelle $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ les détermi-

nants partiels que l'on peut former avec les six fonctions linéaires

$$\begin{array}{ccc} X, & Y, & Z, \\ X', & Y', & Z', \end{array}$$

on déduit des équations (11) et (12)

$$(14) \quad \frac{\alpha''}{\Delta_x} = \frac{\beta''}{\Delta_y} = \frac{\gamma''}{\Delta_z};$$

si l'on porte dans l'équation (7), à la place de α'' , β'' , γ'' , les quantités proportionnelles, il vient, pour l'équation de la droite mobile,

$$(14) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \\ A \Delta_x & B \Delta_y & C \Delta_z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, en apparence du cinquième degré, d'après la forme des Δ , est en réalité du quatrième; car, en examinant la composition de ces fonctions, on voit qu'en désignant par L, M, N les déterminants partiels des six cosinus

$$\begin{array}{ccc} \lambda, & \mu, & \nu, \\ \lambda', & \mu', & \nu', \end{array}$$

savoir

$$L = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \nu' & \lambda' \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix},$$

et par V la fonction linéaire des coordonnées

$$Lx + My + Nz,$$

on verra que

$$\Delta_x = Vx + r_x, \quad \Delta_y = Vy + r_y, \quad \Delta_z = Vz + r_z,$$

r_x, r_y, r_z étant des fonctions du premier degré; donc, dans l'équation (14), on peut remplacer les Δ par les r dans les termes de la seconde ligne, et l'équation ainsi

transformée

$$(15) \quad A\Delta_x(yr_z - zr_y) + B\Delta_y(zr_x - xr_z) + C(xr_y - yr_x) = 0$$

est bien du quatrième degré.

Dans le cas où l'une des droites fixes, (D) par exemple, passe par le centre de gravité, on a identiquement

$$(16) \quad \frac{yr_z - zr_y}{X} = \frac{zr_x - xr_z}{Y} = \frac{xr_y - yr_x}{Z};$$

car, à cause des conditions $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 = 0$, il vient

$$r_z = \mu'_0 Z - \nu'_0 Y, \quad r_y = \nu'_0 X - \lambda'_0 Z, \quad r_x = \lambda'_0 Y - \mu'_0 X,$$

et de plus

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Or la première des équations (16) équivaut à

$$(\lambda'_0 Y - \mu'_0 X)(xX + yY + zZ) = 0,$$

ce qui est une identité, et, par suite, l'équation de la surface devient

$$(17) \quad A\Delta_x X + B\Delta_y Y + C\Delta_z Z = 0,$$

laquelle est bien du troisième degré.

Les deux droites fixes font toujours partie du lieu. Enfin, si l'on suppose que la droite (D) soit un des axes principaux relatifs au centre de gravité, l'axe des z par exemple, il faut supposer

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \quad \mu = 0, \quad X = -\gamma, \quad Y = x, \quad Z = 0, \\ \Delta_x &= xZ', \quad \Delta_y = \gamma Z', \quad \Delta_z = -(xX' + yY'), \end{aligned}$$

et l'équation de la surface devient

$$(18) \quad (B - A)xyZ' = 0;$$

elle représente un système de trois plans, savoir : les

deux plans principaux qui se coupent suivant la droite (D), et le plan qui projette cette droite sur le troisième plan principal.

Si, dans l'équation (15), on remplace les Δ_x, \dots par leurs expressions $Vx + r_x, \dots$, elle prend la forme

$$(19) \quad VS + T = 0,$$

S et T étant des fonctions du troisième degré qui se déduisent aisément du premier membre de l'équation (15). L'équation (17) prend aussi la même forme; seulement S et T sont alors du second degré, de sorte que les plans parallèles au plan $V = 0$, c'est-à-dire aux deux droites fixes, coupent la surface suivant une série de coniques.

II.

Nous avons à chercher encore *le lieu du point par rapport auquel chacune des droites mobiles est un axe principal d'inertie.*

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées de ce point; il résulte de considérations géométriques exposées au commencement du premier paragraphe que ces coordonnées doivent vérifier les équations suivantes :

$$(20) \quad \frac{\xi}{A + \lambda} : \Delta_\xi = \frac{\eta}{B + \lambda} : \Delta_\eta = \frac{\zeta}{C + \lambda} : \Delta_\zeta.$$

$$(21) \quad \frac{\xi^2}{A + \lambda} + \frac{\eta^2}{B + \lambda} + \frac{\zeta^2}{C + \lambda} = 1.$$

Or l'élimination de λ se fait simplement en combinant les rapports égaux et tenant compte de l'équation (21); on déduit, en désignant de nouveau par x, y, z les coordonnées d'un point du lieu,

$$\frac{\frac{y}{\Delta_y} - \frac{z}{\Delta_z}}{B - C} = \frac{\frac{z}{\Delta_z} - \frac{x}{\Delta_x}}{C - A} = \frac{\frac{x}{\Delta_x} - \frac{y}{\Delta_y}}{A - B} = \frac{1}{x \Delta_x + y \Delta_y + z \Delta_z}.$$

En ne combinant que les trois premiers rapports deux à deux, on retombe sur l'équation (15) qui représente bien un lieu du point cherché; mais, en combinant l'un de ces trois rapports ou un rapport égal à chacun d'eux avec le dernier, il vient

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} (x\Delta_x + y\Delta_y + z\Delta_z)(y r_z - z r_y + z r_x - x r_z + x r_y - y r_x) \\ = (B - C)\Delta_y\Delta_z + (C - A)\Delta_z\Delta_x + (A - B)\Delta_x\Delta_y, \end{array} \right.$$

équation du cinquième degré qui, combinée avec l'équation (15), fait connaître le lieu cherché.

Les droites fixes font partie du lieu ainsi que la courbe commune aux trois surfaces du second degré

$$\Delta_x = 0, \quad \Delta_y = 0, \quad \Delta_z = 0;$$

car il est aisé de voir que tous les points communs aux deux premières appartiennent à la troisième, et que tous ces points communs appartiennent bien aux deux surfaces (15) et (22).

Note. — Autres solutions de MM. Bourguet et Moret-Blanc.