ASTOR

Problème

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 507-511
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__507_1>

PROBLÈME ;

Par M. ASTOR.

Étant donnée une ellipse, on lui mène en un de ses points le cercle osculateur, on mène la deuxième tangente commune au cercle et à l'ellipse, et l'on demande le lieu de son point de rencontre avec la tangente au point d'osculation.

On sait que, si l'on mène à une ellipse divers cercles tangents en un même point, le lieu des points de rencontre des secondes tangentes communes est l'hyperbole homofocale de l'ellipse qui passe par le point donné sur cette dernière. Or, si le cercle considéré devient le cercle osculateur, une troisième tangente commune coïncidera avec la tangente au point d'osculation, et la deuxième tangente commune viendra couper la tangente considérée sur l'hyperbole homofocale. Un point du lieu cherché est donc donné par la deuxième intersection d'une tangente à l'ellipse avec l'hyperbole homofocale du point de contact. Cette propriété permet de trouver le lieu d'une manière assez commode.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse, et $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ les coordonnées du point de contact; l'équation de la tangente est

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1,$$

celle de l'hyperbole homofocale

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=c^2.$$

Entre (1) et (2), il suffit d'éliminer φ pour avoir le lieu; mais, comme (1) et (2) sont satisfaites quand on y fait $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, il est clair que le résultat de l'élimination contiendra en facteur l'équation de l'ellipse. Il s'agira donc de dégager ce facteur.

Pour faire l'élimination, formons au moyen de (1) une équation bicarrée en $\operatorname{tang}\varphi$; quant à (2), elle s'écrit immédiatement sous la même forme. Les deux équations sont alors

$$x^2\operatorname{tang}^4\varphi+(x^2-y^2-c^2)\operatorname{tang}^2\varphi-y^2=0,$$

$$\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2\operatorname{tang}^4\varphi-2\left[\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\right]\operatorname{tang}^2\varphi \\ +\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=0.$$

Écrivons-les sous la forme

$$\begin{aligned} A\operatorname{tang}^4\varphi+B\operatorname{tang}^2\varphi+C&=0,\\ A'\operatorname{tang}^4\varphi+2B'\operatorname{tang}^2\varphi+C'&=0;\end{aligned}$$

le résultat de l'élimination est, comme on sait,

$$(BB' - AC' - CA')^2 = (B^2 - 4AC)(B'^2 - A'C').$$

Posons $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \lambda$; alors

$$\begin{aligned}
BB' - AC' - CA' \\
&= -\left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \lambda\right)(x^2 - y^2 - c^2) - x^2\left(\frac{y^2}{b^2} - \lambda\right)^2 + y^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \lambda\right)^2 \\
&= \lambda\left[(y^2 - x^2)\lambda - (x^2 - y^2 - c^2) + \frac{c^2x^2y^2}{a^2b^2}\right] \\
&= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^4}{b^2} - \frac{x^4}{a^2} + c^2\right).
\end{aligned}$$

Quant à $B'^2 - A'C'$, on le trouve par un calcul facile égal à

$$\frac{4x^2y^2}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right),$$

de sorte que l'équation du lieu est, en supprimant le facteur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^4}{b^2} - \frac{x^4}{a^2} + c^2\right)^2 \\
&\qquad = \frac{4x^2y^2}{a^2b^2}[(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4].
\end{aligned}$$

Le lieu, ainsi qu'on le voit, est une courbe du dixième degré. Cette équation ne permettrait pas de le construire facilement, mais on peut avoir les coordonnées x et y d'un point du lieu en fonction de l'angle φ. Voici une méthode simple. Remarquons pour cela que les deux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\varphi} + \dfrac{y}{\sin\varphi} = c\lambda, \\[2ex] \dfrac{x}{\cos\varphi} - \dfrac{y}{\sin\varphi} = \dfrac{c}{\lambda}, \end{cases}$$

où λ est arbitraire, représentent un point de l'hyperbole homofocale. Écrivons l'équation d'une droite passant par le point de rencontre des droites (3) :

$$(4)\qquad \frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}-c\lambda+\mu\left(\frac{x}{\cos\varphi}-\frac{y}{\sin\varphi}-\frac{c}{\lambda}\right)=0.$$

Écrivons que cette droite (4) se confond avec la tangente (1). En éliminant μ entre les deux équations de condition, nous trouverons une équation du second degré en λ; mais $\lambda=\dfrac{a+b}{c}$ doit *a priori* en être racine; et il sera par conséquent facile d'avoir l'autre racine; cette valeur de λ substituée dans les équations (3) résoudra le problème. On trouve ainsi

$$\lambda=\frac{(a-b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)},$$

et les équations (3) deviennent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}&=\frac{(a-b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi},\\ \frac{x}{\cos\varphi}-\frac{y}{\sin\varphi}&=\frac{(a+b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit, par des calculs faciles,

$$x=a\cos\varphi\,\frac{b^2\cos^4\varphi+a^2\sin^4\varphi+2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi},$$

$$y=-b\sin\varphi\,\frac{b^2\cos^4\varphi+a^2\sin^4\varphi+2a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi}.$$

Sous cette forme, on voit que x et y sont infinis quand

$$b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi=0,$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Les quatre tangentes correspondant à ces valeurs de $\tang\varphi$ sont donc asymptotes à la courbe, ce qui donne une propriété géométrique des points de l'ellipse correspondant à ces valeurs de φ; l'équation nous montre d'autre part que les asymptotes sont parallèles aux deux droites

$$\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et, en effet, la tangente au point $\tang\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ a pour coefficient angulaire

$$-\frac{b}{a}\cot\varphi = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$