GAMBEY

Solution de la question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1875

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 503-507
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__503_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1875 ;

PAR M. GAMBEY.

On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz *et l'on imagine un conoïde ayant pour directrice rectiligne l'axe* Oz, *pour plan directeur le plan* xOy, *et pour directrice curviligne une courbe également donnée* C. *On demande de déterminer les projections, sur le plan des* (x, y), *des lignes asymptotiques de la surface.*

On appliquera les formules au cas particulier où la directrice curviligne C *est définie par les équations*

$$x^2+y^2-a(x+y)=0,$$
$$x+y-z-a=0.$$

Définissons d'abord les lignes asymptotiques d'une surface. Ce sont des lignes tracées sur cette surface et telles qu'en chacun de leurs points elles aient pour tangente l'une des asymptotes de l'indicatrice correspondante.

Il en résulte qu'en chaque point d'une surface passent deux lignes asymptotiques de cette surface.

(*) Extrait d'un Mémoire inédit : *Sur l'application des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques.*

D'après cela, et nous fondant sur les propriétés des tangentes conjuguées, nous écrirons que les cosinus des angles, que fait avec les axes de coordonnées l'intersection du plan tangent au point (x, y, z) et du plan tangent au point infiniment voisin, sont proportionnels aux projections sur les mêmes axes de l'élément ds de l'une des lignes asymptotiques passant par ce point.

Posons

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

L'équation du plan tangent au point (x, y, z) est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

celle du plan tangent au point infiniment voisin (x', y', z') est

$$Z - z' = p'(X - x') + q'(Y - y'),$$

p' et q' désignant ce que deviennent p et q quand on passe du point (x, y, z) au point (x', y', z').

Les cosinus des angles que fait avec les axes l'intersection de ces deux plans sont proportionnels à

$$q' - q, \quad -(p' - p), \quad pq' - qp',$$

ou

$$dq, \quad -dp, \quad p\,dq - q\,dp,$$

ou encore à

$$s\,dx + t\,dy, \quad -(r\,dx + s\,dy), \quad p(s\,dx + t\,dy) - q(r\,dx + s\,dy);$$

nous avons donc

$$\frac{s\,dx + t\,dy}{dx} = \frac{-(r\,dx + s\,dy)}{dy} = \frac{p(s\,dx + t\,dy) - q(r\,dx + s\,dy)}{dz}.$$

Ce sont les équations différentielles des lignes asymptotiques de la surface considérée $f(x, y, z) = 0$.

Les deux premiers rapports donnent la projection sur le plan des xy. On en tire facilement

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy}{dx}\right) + r = 0, \tag{1}$$

où l'on substituera les valeurs en x et y de r, s, t tirées de $f(x, y, z) = 0$.

Remarquons que l'on aurait pu former cette équation immédiatement en écrivant que les coefficients angulaires des tangentes à la projection des lignes asymptotiques sont égaux à ceux des asymptotes de l'indicatrice au point considéré.

Pour intégrer l'équation (1), nous résoudrons d'abord par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera deux équations distinctes, savoir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}. \tag{2}$$

Considérant maintenant le conoïde droit de l'énoncé, dont l'équation est, en posant $\frac{y}{x} = u$,

$$z = \varphi(u),$$

on en tire facilement

$$r = \frac{u^2}{x^2}\varphi''(u) + \frac{2u}{x^2}\varphi'(u),$$

$$s = \frac{-u}{x^2}\varphi''(u) - \frac{1}{x^2}\varphi'(u),$$

$$t = \frac{1}{x^2}\varphi''(u),$$

d'où

$$s^2 - rt = \left[\frac{\varphi'(u)}{x^2}\right]^2.$$

Ainsi, dans les conoïdes, l'expression $s^2 - rt$ est un carré parfait.

L'équation (2) deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\varphi''(u) + \varphi'(u) \pm \varphi'(u)}{\varphi''(u)},$$

d'où, d'abord,

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = u + \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)}.$$

Mais, de $y = ux$, on déduit

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

de sorte que l'égalité (3) devient

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)},$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{\varphi''(u)}{2\varphi'(u)}\,du,$$

et les variables sont séparées.

La seconde valeur de $\frac{dy}{dx}$ conduit à

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} = 0,$$

d'où

$$u = \text{const.}$$

Appliquons ces formules au conoïde particulier de l'énoncé dont l'équation est

$$z = \frac{2axy}{x^2 + y^2} = \frac{2au}{1 + u^2},$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = \frac{2a(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2}, \quad \varphi''(u) = \frac{4au(u^2 - 3)}{(1 + u^2)^3},$$

et l'équation (4) devient

$$\frac{dx}{x} = \frac{u(u^2 - 3)}{1 - u^4} du,$$

d'où, en intégrant,

$$\log x = \log C \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^2 + 1},$$

C étant une constante arbitraire, puis

$$(6) \qquad (x^2 + y^2)^2 = C^2(y^2 - x^2).$$

Les lignes asymptotiques sont donc en projection des droites et des lemniscates.