NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 49-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__49_0>

SUR LA MÉTHODE DE MONGE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. LAGUERRE.

La méthode donnée par Monge pour intégrer les équations linéaires aux différences partielles du second ordre a été complétement élucidée, d'abord par les travaux d'Ampère et ensuite par ceux de Boole et de Bour; il me semble néanmoins qu'on peut la présenter avec plus de netteté et de brièveté qu'on ne le fait d'ordinaire.

I.

Sur la représentation de la forme

$$W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

1. Soit $W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$, où r, s, t représentent des variables quelconques; je vais d'abord montrer que l'on peut toujours représenter la forme W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et étudier les propriétés de ces diverses représentations.

En développant ce déterminant, on voit qu'il est de la forme indiquée, et, en identifiant les coefficients des quantités r, s, t,..., on aura, pour déterminer les inconnues a, b, c, d, α, β, γ, δ, les cinq équations

$$(1) \qquad \mathrm{M} = d\gamma - c\delta,$$

$$(2) \qquad \mathrm{N} = a\beta - b\alpha,$$

$$(3) \qquad \mathrm{L} = b\gamma - c\beta,$$

$$(4) \qquad \mathrm{H} = d\alpha - a\delta,$$

$$(5) \qquad 2\mathrm{K} = d\beta - b\delta + a\gamma - c\alpha.$$

On a maintenant, d'après un théorème connu (*),

$$(b\gamma - c\beta)(a\delta - d\alpha) + (c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) + (a\beta - b\alpha)(c\delta - d\gamma) = 0,$$

ou encore, en vertu des relations précédentes,

$$(c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) = \mathrm{HL} + \mathrm{MN};$$

par suite, si l'on fait, pour abréger, $\mathrm{G} = \mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} - \mathrm{MN}$,

$$(5)' \qquad \mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}} = d\beta - b\delta$$

et

$$(5)'' \qquad \mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}} = a\gamma - c\alpha.$$

2. Des équations (1), (2), (3), (4), (5)' et (5)'' il est facile de déduire un système de valeurs des indéterminées a, b, c, d,....

Remarquons d'abord que, parmi les déterminants mineurs $a\beta - b\alpha$, $a\gamma - c\alpha$,... qui entrent dans ces équations, il s'en trouve au moins un qui n'est pas nul, autrement la forme W s'annulerait identiquement. Sup-

(*) C'est le théorème de Fontaine; voir *Théorie des déterminants*, par Baltzer, p. 26.

posons, par exemple, que $a\beta - b\alpha$ soit différent de zéro : je mettrai les équations précédentes sous la forme

$$M = d\gamma - c\delta, \quad N = a\beta - b\alpha$$

et

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} H & K - \sqrt{G} \\ K + \sqrt{G} & L \end{matrix} \quad (*).$$

La première de ces équations étant une conséquence des autres peut être négligée; donnons maintenant à a, b, α et β quatre valeurs arbitraires satisfaisant à la relation $a\beta - b\alpha = N$, la dernière relation donnera

$$\begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = -\frac{1}{N} \times \begin{matrix} H & K - \sqrt{G} \\ K + \sqrt{G} & L \end{matrix} \times \begin{matrix} b & -a \\ -\beta & a \end{matrix},$$

qui déterminera les autres indéterminées d, c, δ et γ.

3. On voit, par ce qui précède, que l'on peut toujours représenter W par un déterminant de la forme indiquée, et, si G n'est pas nul, comme on peut prendre pour $\sqrt{G}$ deux valeurs, il en résulte que toutes ces représentations se distribueront en deux groupes, le premier groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur $+\sqrt{G}$ du radical et que je désignerai sous le nom de *représentations de première espèce,* le second groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur

(*) J'indique ici, d'une façon abregee, que le système lineaire du second membre s'obtient en composant les deux systèmes linéaires du premier membre dans l'ordre dans lequel ils sont places. Cette seule relation tient donc lieu des relations (3), (4), (5)' et (5)''; on en conclut en particulier que le déterminant du système linéaire du second membre est egal au produit des déterminants des systèmes du premier membre; en d'autres termes, que $d\gamma - c\delta = M$. Cette relation, qui est une conséquence des autres, peut donc être mise de côte.

Voir, a ce sujet, mon Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIII[e] Cahier).

$-\sqrt{G}$; je les appellerai *représentations de seconde espèce.*

Si G était égal à zéro, il est clair qu'il n'y aurait qu'une seule espèce de représentations de W.

Pour abréger, si l'on a

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

je dirai que $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ est une représentation de la forme W.

4. Théorème I. — *Soient deux représentations de la forme* W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, *qui soient de systèmes différents ; on a les quatre relations*

$$(6)\begin{cases} ac' + bd' - ca' - db' = 0, & a\gamma' + b\delta' - c\alpha' - d\beta' = 0, \\ \alpha c' + \beta d' - \gamma a' - \delta b' = 0, & \alpha\gamma' + \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta' = 0. \end{cases}$$

Si G $= 0$, *les mêmes relations ont lieu relativement à deux représentations quelconques de* W.

Démonstration. — Supposons G différent de zéro et soient deux représentations de W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, qui soient respectivement de première et de seconde espèce; d'après ce que j'ai démontré ci-dessus (2), on aura

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} H & K-\sqrt{G} \\ K+\sqrt{G} & L \end{matrix}$$

et

$$\begin{matrix} \alpha' & a' \\ \beta' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} d' & -c' \\ -\delta' & \gamma' \end{matrix} = \begin{matrix} H & K+\sqrt{G} \\ K-\sqrt{G} & L \end{matrix},$$

ou encore

$$\begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix}$$

et par suite

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix}.$$

Supposons, pour un instant, que

$$\mathrm{M} = d\gamma - c\delta = d'\gamma' - c'\delta'$$

soit différent de zéro; multiplions les deux membres de l'égalité, à gauche par le système $\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix}$ et à droite par le système $\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}$, il viendra, après avoir divisé par M,

$$\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix},$$

relation qui, développée, donne précisément les quatre relations qu'il s'agissait de démontrer.

La démonstration précédente suppose M différent de zéro; mais, par un raisonnement connu, on montrera facilement que la proposition subsiste même quand M est nul.

Il est clair que, si $\mathrm{G} = 0$, la proposition est vraie relativement à deux représentations quelconques de W.

II.

Intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre $\mathrm{W} = 0$.

3. Supposons maintenant que r, s, t soient les dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z par rapport aux variables x et y, les coefficients de W étant d'ailleurs des fonctions quelconques de x,

y, z, et des dérivées du premier ordre p et q, et soit à intégrer l'équation (7) $W = 0$.

Pour rester d'abord dans le cas le plus général, en supposant G différent de zéro, imaginons que nous ayons trouvé deux représentations de W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et de systèmes différents; soient $W = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $W = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ ces deux représentations.

Cela posé, on aura les propositions suivantes :

THÉORÈME II. — *Si $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation (7) renfermant une fonction arbitraire f, chacune des fonctions u et v est une solution du système d'équations simultanées du premier ordre*

$$(8)\quad \begin{cases} a\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c\,\dfrac{d\omega}{dp} + d\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\[2ex] \alpha\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \end{cases}$$

ou de ce second système d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} a'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c'\,\dfrac{d\omega}{dp} + d'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\[2ex] \alpha'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma'\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0. \end{cases}$$

On a posé, pour abréger,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \frac{d\omega}{dx} + p\,\frac{d\omega}{dz}$$

et

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \frac{d\omega}{dy} + q\,\frac{d\omega}{dz}.$$

Démonstration. — Prenons successivement les dérivées, par rapport à x et par rapport à y, de l'équation $u = f(v)$, il viendra

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dp} + s\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dx}\right) + r\frac{dv}{dp} + s\frac{dv}{dq}\right]$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + s\frac{du}{dp} + t\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + s\frac{dv}{dp} + t\frac{dv}{dq}\right],$$

et, puisque $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation $W = 0$, cette dernière doit provenir de l'élimination de $f'(v)$ entre les deux équations précédentes. On aura donc (du moins à un facteur constant près)

$$W = \begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dp} + s\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) + r\frac{dv}{dp} + s\frac{dv}{dq} \\ \left(\frac{du}{dy}\right) + s\frac{du}{dp} + t\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dy}\right) + s\frac{dv}{dp} + t\frac{dv}{dq} \end{vmatrix};$$

d'où, par une transformation facile,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & s & t \\ -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix},$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

est une représentation de W. En vertu du théorème I, on voit donc que chacune des fonctions u et v satisfera au système d'équations (8) ou au système (7), suivant que cette représentation sera de deuxième ou de première espèce.

THÉORÈME III. — *Réciproquement, si u et v sont des solutions du système d'équations* (8) *ou du système* (9), $u=f(v)$, *où f désigne une fonction arbitraire, est une intégrale première de l'équation* (7).

Démonstration. — Soit, par exemple, ω une solution quelconque des équations (8)

$$a\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+b\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+c\,\frac{d\omega}{dp}+d\,\frac{d\omega}{dq}=0$$

et

$$\alpha\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\gamma\,\frac{d\omega}{dp}+\delta\,\frac{d\omega}{dq}=0;$$

on a en outre les deux relations suivantes, qui ont évidemment lieu pour une fonction quelconque de x et de y,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\frac{d\omega}{dp}r+\frac{d\omega}{dq}s=0,$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\frac{d\omega}{dp}s+\frac{d\omega}{dq}t=0.$$

Entre les équations précédentes, éliminons $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, $\frac{d\omega}{dp}$ et $\frac{d\omega}{dq}$, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}=0,$$

ou encore $W=0$, d'où il résulte que $\omega=0$ est une intégrale de l'équation (7). Si u et v sont deux valeurs particulières de ω, les équations (8) étant linéaires,

$u - f(v)$ satisfait également à ces équations, quelle que soit la fonction f; la proposition est donc démontrée.

Théorème IV. — *En désignant par u et v deux solutions communes au système d'équations* (8), *et par u' et v' deux solutions communes au système* (9), *si des équations $u - f(v) = 0$ et $u' - \varphi(v') = 0$ on tire les valeurs de p et q en fonction de x, y et z, ces valeurs substituées dans $p\,dx + q\,dy$ rendent cette expression une différentielle exacte, en sorte que, pour achever l'intégration, il suffit d'intégrer l'équation*

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Démonstration. — D'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} -\frac{du'}{dp} & -\frac{du'}{dq} & \left(\frac{du'}{dx}\right) & \left(\frac{du'}{dy}\right) \\ -\frac{dv'}{dp} & -\frac{dv'}{dq} & \left(\frac{dv'}{dx}\right) & \left(\frac{dv'}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

sont deux représentations de W appartenant à des systèmes différents.

En vertu du théorème I, on a donc la relation

$$\frac{du}{dp}\left(\frac{du'}{dx}\right) + \frac{du}{dq}\left(\frac{du'}{dy}\right) - \frac{du'}{dp}\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{du'}{dq}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

qui est la condition d'intégrabilité. Comme d'ailleurs on peut remplacer dans cette relation u par une solution quelconque du système (8), et u' par une solution quelconque du système (9), la proposition est démontrée.

6. Le cas où $G = 0$ donne lieu aux mêmes propositions, sauf qu'il suffit de considérer une seule représentation de W.