NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 481-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__481_0>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

57. *Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' étant polaires réciproques par rapport à la surface* S. *l'indice du système des droites* ε, ε' *est donné par les relations suivantes :*

1° *Lorsque les droites sont données par deux de leurs points ef, e'f',*

$$\pi^4 ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (e,\mathrm{A})(e,\mathrm{B}) \\ (f,\mathrm{A})(f,\mathrm{B}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e',\mathrm{A}')(e',\mathrm{B}') \\ (f',\mathrm{A}')(f',\mathrm{B}) \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} \quad \text{(6 termes)}$$

$$ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{ea'} & \mathrm{I}_{eb'} \\ \mathrm{I}_{fa'} & \mathrm{I}_{fb'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{ae'} & \mathrm{I}_{be'} \\ \mathrm{I}_{af'} & \mathrm{I}_{bf'} \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{aa'}\mathrm{I}_{bb'}} \quad \text{(6 termes).}$$

2° *Lorsque les droites sont déterminées par les intersections de deux couples de plans* EF, E'F',

$$-\pi^2 \sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'}\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} (a,\mathrm{E})(b,\mathrm{E}) \\ (a,\mathrm{F})(b,\mathrm{F}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a',\mathrm{E}')(b',\mathrm{E}') \\ (a',\mathrm{F}')(b',\mathrm{F}') \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{aa'}\mathrm{I}_{bb'}} \quad \text{(6 termes)}$$

$$-\sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'}\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{EA}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{EB}'} \\ \mathrm{I}_{\mathrm{FA}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{FB}'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{AE}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{BE}'} \\ \mathrm{I}_{\mathrm{AF}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{BF}'} \end{vmatrix} \frac{\pi^2}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} \quad \text{(6 termes),}$$

on a aussi la relation suivante, qui ne contient que des indices :

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\alpha'}\mathrm{I}_{\alpha\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\alpha\alpha'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\beta'}\mathrm{I}_{\beta\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\beta\beta'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\gamma'}\mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\lambda'}\mathrm{I}_{\lambda\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\lambda\lambda'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\mu'}\mathrm{I}_{\mu\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\mu\mu'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\nu'}\mathrm{I}_{\nu\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\nu\nu'}}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451.

Cette dernière se déduit aisément des précédentes; on a, en effet,

$$\begin{vmatrix} I_{ea'} & I_{eb'} \\ I_{fa'} & I_{fb'} \end{vmatrix} = ef.a'b'\, I_{\epsilon\gamma'} \quad \begin{vmatrix} I_{ae'} & I_{be'} \\ I_{af'} & I_{bf'} \end{vmatrix} = ab.e'f'\, I_{\gamma\epsilon'},$$

$$I_{aa'} I_{bb'} = ab.a'b'\, I_{\gamma\gamma'},$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans la deuxième expression de $I_{\epsilon\epsilon'}$, on obtient la relation dont il s'agit.

Deux trièdres $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, étant correspondants par rapport à la surface S, si par le sommet du premier on mène une droite ε, par le sommet du second une droite ε',

$$I_{\epsilon\epsilon'} = \frac{\sin\varepsilon A \sin\varepsilon' A'}{\sin\lambda A \sin\lambda' A'} I_{\lambda\lambda'} + \frac{\sin\varepsilon B \sin\varepsilon' B'}{\sin\mu B \sin\mu' B'} I_{\mu\mu'} + \frac{\sin\varepsilon C \sin\varepsilon' C'}{\sin\nu C \sin\nu' C'} I_{\nu\nu'}.$$

Deux angles $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$ étant correspondants par rapport à la surface S, si l'on mène par leurs sommets et dans leurs plans les droites ε, ε',

$$I_{\epsilon\epsilon'} = \frac{\sin\varepsilon\mu \sin\varepsilon'\mu'\, I_{\lambda\lambda'} + \sin\varepsilon\lambda \sin\varepsilon'\lambda'\, I_{\mu\mu'}}{\sin\lambda\mu \sin\lambda'\mu'}.$$

Remarque. — Lorsque les droites ε, ε' sont conjuguées, $I_{\epsilon\epsilon'} = 0$. Si donc la droite ε' coïncide avec ε, en égalant à zéro la relation à six termes de l'expression I_ϵ on obtient une équation par droites de la surface S.

58. Les formules démontrées ci-dessus donnent lieu aux suivantes, dont nous aurons à faire usage :

Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' sont polaires réciproques par rapport à la surface S.

Si l'on désigne par E et E' les plans polaires des *deux points e′ et e par rapport à une autre surface du second degré S′, on a les relations*

$$(1)\qquad \frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{EE'}}{I'_{EE'}}I'_{ee'}=\sum\frac{I'_{ae'}I'_{ea'}}{I_{aa'}},$$

$$(2)\qquad \frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{ee'}}{I'_{ee'}}I'_{EE'}=\sum\frac{I'_{AE'}I'_{EA'}}{I_{AA'}};$$

et si l'on désigne par φ et φ′ les polaires de deux droites ε′ et ε par rapport à la surface S′,

$$(3)\qquad \frac{\pi_2}{\pi'^2}\frac{I_{\varphi\varphi'}}{I'_{\varphi\varphi'}}I'_{\varepsilon\varepsilon'}=\sum\frac{I'_{\gamma\varepsilon'}I'_{\varepsilon\gamma'}}{I_{\gamma\gamma'}},$$

I′ *désignant les indices par rapport à la surface* S′ *et* π′ *le produit des demi-axes de cette surface.*

1° Pour démontrer la première relation, nous remarquons d'abord que

$$-\pi^2 I_{EE'}=\sum\frac{(a,\,E)(a',\,E')}{I_{aa'}};$$

or, si le point o' est le centre de la surface S′,

$$I'_{ae'}=-\frac{(a,\,E)}{(o',\,E)},\quad I'_{ea'}=-\frac{(a',\,E')}{(o',\,E')},$$

par conséquent

$$(a,\,E)(a',\,E')=(o',\,E)(o',\,E')\,I'_{ae'}I'_{ea'}.$$

Nous avons alors

$$-\pi^2\frac{I_{EE'}}{(o',\,E)(o',\,E')}=\sum\frac{I'_{ae'}I'_{ea'}}{I_{aa'}},$$

et, puisque

$$-\frac{I'_{ee'}}{I'_{EE'}}=\frac{\pi'^2}{(o',\,E)(o',\,E')},$$

la première relation est démontrée.

2° La seconde se trouve de la même manière, à l'aide de l'égalité

$$-\pi^2 I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{I_{AA'}};$$

on a

$$I'_{AE'} = \frac{(e, A)(o', E')}{\pi'^2}, \quad I'_{EA'} = \frac{(e', A')(o', E)}{\pi'^2},$$

d'où

$$(e, A)(e', A') = \frac{\pi'^4 I'_{AE'} I'_{EA'}}{(o', E)(o', E')};$$

par suite

$$-\frac{(o', E)(o', E')\pi^2}{\pi'^4} I_{ee'} = \sum \frac{I'_{AE'} I'_{EA'}}{I_{AA'}},$$

ce qui revient à la relation (2), en ayant égard à la valeur du produit (o', E) (o', E') écrite plus haut.

3° Considérons maintenant deux droites ε, ε': la première est déterminée par les points e et f, la seconde par les points e' et f'. Soient E', F' les plans polaires des points e et f; E, F les plans polaires des points e', f', par rapport à la surface S'. Appelant φ l'intersection EF, φ' l'intersection E'F', les droites ε et φ', ε' et φ sont polaires réciproques par rapport à la surface S'. D'après la relation (3), nous avons

$$-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'}$$
$$= \sum \begin{vmatrix} (a,E) & (a,F) \\ (b,E) & (b,F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a',E') & (a',F') \\ (b',E') & (b',F') \end{vmatrix} \frac{I}{I_{aa'} I_{bb'}};$$

or

$$(a,E) = -(o',E) I'_{ae'}, \quad (a,F) = -(o',F) I'_{af'}, \ldots,$$
$$(b,E) = -(o',E) I'_{be'}, \quad (b,F) = -(o',F) I'_{bf'};$$

par conséquent

$$\frac{-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'}}{(o',E)(o',F)(o',E')(o',F')}$$
$$= \sum \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix} \frac{I}{I_{aa'} I_{bb'}};$$

mais

$$\begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} = ab.e'f'\mathrm{I}',$$

$$\begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix} = ef.a'b'\mathrm{I}_{\varepsilon\gamma'},$$

$$\mathrm{I}_{aa'}\mathrm{I}_{bb'} = ab.a'b'\mathrm{I}_{\gamma\gamma'};$$

donc

$$\frac{-\pi^2 \sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'} \mathrm{I}_{\varphi\varphi'}}{ef.e'f'(o',\mathrm{E})(o',\mathrm{F})(o',\mathrm{E'})(o',\mathrm{F'})} = \sum \frac{\mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'}\mathrm{I}_{\varepsilon\gamma'}}{\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}}.$$

D'autre part, nous avons les relations

$$\begin{vmatrix} I'_{ee'} & I'_{ef'} \\ I'_{fe'} & I'_{ff'} \end{vmatrix} = ef.e'f'\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'},$$

$$\begin{vmatrix} I'_{\mathrm{EE'}} & I'_{\mathrm{EF'}} \\ I'_{\mathrm{FE'}} & I'_{\mathrm{FF'}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi'^2} \sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'} \mathrm{I}_{\varphi\varphi'},$$

et, puisque

$$I'_{ee'} = -\frac{\pi'^2 I'_{\mathrm{EE'}}}{(o',\mathrm{E})(o',\mathrm{E'})}, \quad I'_{ef'} = -\frac{\pi'^2 I'_{\mathrm{FE'}}}{(o',\mathrm{E'})(o',\mathrm{F})},$$

$$I'_{fe'} = -\frac{\pi'^2 I'_{\mathrm{EF'}}}{(o',\mathrm{E})(o',\mathrm{F'})}, \quad I'_{ff'} = -\frac{\pi'^2 I'_{\mathrm{FF'}}}{(o',\mathrm{F})(o',\mathrm{F'})},$$

la première devient

$$\begin{vmatrix} I'_{\mathrm{EE'}} & I'_{\mathrm{FE'}} \\ I'_{\mathrm{EF'}} & I'_{\mathrm{FF'}} \end{vmatrix} \frac{\pi'^4}{(o',\mathrm{E})(o',\mathrm{F})(o',\mathrm{E'})(o',\mathrm{F'})} = ef.e'f'I'_{\varepsilon\varepsilon'},$$

d'où résulte l'égalité

$$ef.e'f'(o',\mathrm{E})(o',\mathrm{F})(o',\mathrm{E'})(o',\mathrm{F'})I'_{\varepsilon\varepsilon'} = -\pi'^2 \sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'} I'_{\varphi\varphi'}.$$

Nous avons par conséquent

$$\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{\mathrm{I}_{\varphi\varphi'}}{I'_{\varphi\varphi'}}I'_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{I'_{\gamma\varepsilon'}I'_{\varepsilon\gamma'}}{\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}}.$$

59. Du théorème général (n° 2), on déduit celui-ci :

Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de points correspondants, aa', bb', cc', dd' par rapport à une surface du second degré,

1° $$I_{aa'}\,I_{bb'}\,I_{cc'}\,I_{dd'} = -\frac{36\,VV'}{\pi^2},$$

2° $$I_{aa'}\,I_{bb'}\,I_{cc'} = 4\,DD'\,I_{DD'},$$

3° $$I_{aa'}\,I_{bb'} = \gamma\,.\,\gamma'\,I_{\gamma\gamma'};$$

V et V' sont les volumes des tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$; D et D' les aires des triangles abc et $a'b'c'$; γ et γ' les longueurs des segments ab et $a'b'$.

Le déterminant Δ'_m (27) donne :

60. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de points correspondants par rapport à la surface* S:

1° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} + \frac{1}{I_{dd'}} = -1;$$

2° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{ec'}} = \frac{1}{I_{nn'}};$$

n et n' sont les points d'intersection des plans abc, $a'b'c'$ avec le diamètre conjugué à l'autre plan;

3° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} = \frac{1}{I_{mm'}},$$

m et m' sont les points d'intersection des droites ab, $a'b'$ avec le plan diamétral conjugué à l'autre.

Démonstration. — Si l'on développe les déterminants Δ'_4, Δ'_3, Δ'_2, on trouve

$$I_{aa'}\,I_{bb'}\,I_{cc'}\,I_{dd'}\left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} + \frac{1}{I_{dd'}}\right) = \frac{36\,VV'}{\pi^2},$$

$$I_{aa'}\,I_{bb'}\,I_{cc'}\left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}}\right) = -4\,DD'\,I_{D_0D'_0},$$

$$I_{aa'}\,I_{bb'}\left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}}\right) = -\gamma\gamma'\,I_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Si l'on a égard au théorème précédent, la première relation devient évidente; relativement à la seconde, en remplaçant le produit $I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'}$ par sa valeur, nous trouvons d'abord

$$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} = -\frac{I_{D_0 D'_0}}{I_{DD'}};$$

or, par définition (51),

$$I_{DD'} = -I_{nn'} I_{D_0 D'_0}:$$

donc, etc. Quant à la troisième, on a d'abord, en remplaçant le produit $I_{aa'} I_{bb'}$ par sa valeur,

$$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} = -\frac{I_{\gamma_0 \gamma'_0}}{I_{\gamma\gamma'}};$$

or, par définition (48),

$$I_{\gamma\gamma'} = -I_{mm'} I_{\gamma_0 \gamma'_0}:$$

donc, etc.

Le déterminant ∇_m (8) nous donne ce théorème :

61. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de plans correspondants* AA', BB', CC', DD' *par rapport à une surface du second degré* S,

1° $$I_{AA'} I_{BB'} I_{CC'} I_{DD'} = -\frac{1}{\pi^6} \frac{(3V)^3}{2\,ABCD} \frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'D'},$$

2° $$I_{AA'} I_{BB'} I_{CC'} = \frac{1}{\pi_4} \sin ABC \sin A'B'C' I_{dd'},$$

3° $$I_{AA'} I_{BB'} = -\frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\gamma\gamma'}.$$

A l'aide du déterminant ∇'_m (41), on trouve ce théorème :

62. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de*

plans correspondants par rapport à la surface S, *dont le centre est au point* o,

1°
$$\frac{(o,A)(o,A')}{I_{AA'}}+\frac{(o,B)(o,B')}{I_{BB'}}+\frac{(o,C)(o,C')}{I_{CC'}}+\frac{(o,D,)(o,D')}{I_{DD'}}=\pi^2,$$

2°
$$\frac{(o,A)(o,A')}{I_{AA'}}+\frac{(o,B)(o,B')}{I_{BB'}}+\frac{(o,C)(o,C')}{I_{CC'}}=\frac{(o,N)(o,N')}{I_{NN'}};$$

N *est le plan mené par le point* ABC *parallèlement au plan polaire du point* A′B′C′ *et* N′ *est le plan mené par le point* A′B′C′ *parallèlement au plan polaire du point* ABC;

3°
$$\frac{(o,A)(o,A')}{I_{AA'}}+\frac{(o,B)(o,B')}{I_{BB'}}=\frac{(o,M)(o,M')}{I_{MM'}}.$$

M *est le plan mené par la droite* AB *parallèlement à la polaire de la droite* A′B′, M′ *est le plan mené par la droite* A′B′ *parallèlement à la polaire de la droite* AB.

Ce théorème peut se démontrer directement comme son homologue (60), mais il est plus simple de le regarder comme corrélatif de celui-ci et de lui appliquer la remarque du n° 10. Les points a, b, c, ..., ayant pour plans polaires les plans A′, B′, C′, ..., par rapport à la surface S, les points n, n', m, m' auront pour plans polaires les plans N, N′, M, M′ définis dans notre énoncé.

Les valeurs de $\delta_{\mu\iota}$ (9) donnent ce théorème :

63. *Étant donnés trois ou deux systèmes de droites*

correspondantes $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, *les premières passant par le point* d, *les secondes par le point* d',

1°
$$I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} I_{\nu\nu'} = -\frac{\sin\lambda\mu\nu \sin\lambda'\mu'\nu'}{\pi^2} I^2_{dd'};$$

2°
$$I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} = \sin\lambda\mu \sin\lambda'\mu' I_{dd'} I_{CC'}.$$

C *et* C′ *sont les plans* $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$.

Du n° 10, on déduit celui-ci :

64. *Étant donnés trois systèmes de droites correspondantes* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *les premières situées dans un plan* D, *les secondes dans un plan* D′,

$$I_{\alpha\alpha'} I_{\beta\beta'} I_{\gamma\gamma'} = \frac{DD'}{RR'} I^2_{DD'},$$

D *et* D′ *désignant aussi les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, RR′ *les rayons des cercles circonscrits à ces triangles.*

65. En combinant de diverses manières les théorèmes précédents, on obtient les relations suivantes :

Si l'on divise la relation 1° par la relation 2° (59), on trouve

(*a*)
$$I_{dd'} I_{DD'} = -\frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2};$$

les points d, d' sont les pôles des plans D, D′.

Si l'on divise la relation 2° par la relation 3° (59)

(*b*)
$$I_{DD'} = \frac{I_{cc'} I_{\gamma\gamma'}}{(c,\gamma)(c',\gamma')};$$

c et c' sont deux points correspondants, γ, γ' deux droites correspondantes; D est le plan (c, γ) et D′ le plan (c', γ').

Si l'on divise la relation 2° par la relation 3° (61), on trouve d'abord

$$\pi^2 I_{CC'} = -\frac{\sin ABC \sin A'B'C'}{\sin AB \sin A'B'} \frac{I_{dd'}}{I_{\nu\nu'}};$$

mais

$$\sin ABC = \sin AB \sin(\nu, C), \quad \sin A'B'C' = \sin A'B' \sin(\nu', C');$$

par conséquent,

$$(c) \qquad I_{dd'} = -\pi^2 \frac{I_{CC'} I_{\nu\nu'}}{\sin(\nu, C)\sin(\nu', C')}.$$

Nous avons les relations

$$I_{aa'} I_{bb'} = \gamma\gamma' I_{\gamma\gamma'}, \quad I_{cc'} I_{dd'} = \nu\nu' I_{\nu\nu'},$$

ν et ν' désignant les longueurs des segments cd et $c'd'$. En multipliant ces deux relations et tenant compte de 1° (59), on trouve

$$-\frac{36VV'}{\pi^2} = \gamma.\nu.\gamma'.\nu' I_{\gamma\gamma'} I_{\nu\nu'};$$

or

$$6V = \gamma\ \nu\ |\ \gamma, \nu\ |,\ 6V' = \gamma'.\nu'\ |\ \gamma', \nu'\ |,$$

par conséquent

$$(d) \qquad I_{\gamma\gamma'} I_{\nu\nu'} = -\frac{|\ \gamma, \nu\ |\ |\ \gamma', \nu'\ |}{\pi^2},$$

γ et ν sont deux droites arbitraires, γ' et ν' les polaires de ces droites par rapport à S.

Si l'on multiplie entre elles les relations 1° (63) et (64), on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(e) \qquad I_{\alpha\alpha'} I_{\beta\beta'} I_{\gamma\gamma'} I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} I_{\nu\nu'} = -\frac{(6V)^3 (6V')^3}{\pi^6 PP'}.$$

P est le produit des six arêtes du tétraèdre $abcd$, P' est le produit des six arêtes du tétraèdre $a'b'c'd'$ polaire du premier, par rapport à S.

Sphère adjointe aux deux plans A *et* B *relative à un point f.*

66. Deux plans A, B et un point f étant donnés, abais-

sons du point f une perpendiculaire fb' sur le plan A et soit a le point où cette perpendiculaire coupe le plan B; abaissons de ce même point f une perpendiculaire fa' sur le plan B et soit b le point où cette perpendiculaire coupe le plan A. La sphère décrite sur ab comme diamètre sera appelée la *sphère adjointe aux deux plans* A *et* B *relative au point* f.

Puissance d'un point m par rapport à la sphère adjointe.

Par le point f et le diamètre ab, menons le plan D, lequel coupe au point c l'intersection des plans A et B; par le diamètre ab menons un plan C perpendiculaire au plan D. Les quatre plans A, B, C, D déterminent un tétraèdre ayant pour sommets les points a, b, c, d; ce dernier d, situé à l'infini, est le pôle du plan D par rapport à la sphère. Si m est un point quelconque de l'espace, on a (14), les indices étant pris par rapport à la sphère,

$$I_{mf} = \frac{(m, A)}{(a, A)} I_{af} + \frac{(m, B)}{(b, B)} I_{bf};$$

les deux autres termes sont nuls, puisque le point f est conjugué aux points c et d. Or, si l'on imagine les plans tangents à la sphère aux points a et b, on trouve, R étant le rayon de la sphère,

$$I_{af} = \frac{(f, B)(a, A)}{2R^2 \cos(A, B)}, \quad I_{bf} = \frac{(f, A)(b, B)}{2R^2 \cos(A, B)}.$$

D'ailleurs (16)

$$2 I_{mf} = I_m + I_f - \frac{\overline{mf}^2}{R^2};$$

par conséquent

$$R^2 I_m - \overline{mf}^2 = - R^2 I_f + \frac{(m, A)(f, B) + (m, B)(f, A)}{\cos AB};$$

mais $R^2 I_m$ est la puissance P_m du point m par rapport à la sphère, $R^2 I_f$ est la puissance du point f par rapport à cette même sphère et l'on a

$$R^2 I_f = fa.fb' = \frac{(f, A)(f, B)}{\cos(A, B)};$$

de là résulte la relation

$$\left(P_m - \overline{fm}^2\right)\cos(A, B) = -(f, A)(f, B) + (f, A)(m, B) + (f, B)(m, A).$$

Propriétés d'un système de deux surfaces du second degré et de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à l'une d'elles.

67. Considérons deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ polaires réciproques par rapport à la surface S, et deux autres tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$ polaires réciproques par rapport à une seconde surface S'. Les sommets aa', bb', cc', dd' sont correspondants; de même les faces XX', YY', ZZ', TT' sont correspondantes. Les plans X, Y, Z, T sont les faces du tétraèdre $xyzt$ et par conséquent les plans polaires des sommets x', y', z', t'. Nous allons démontrer la relation

$$(a) \qquad \sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}.$$

I et I' désignent les indices pris par rapport aux surfaces S et S', π et π' les produits des demi-axes de ces mêmes surfaces, et le signe somme s'étend aux quatre couples de points ou de plans correspondants.

En effet, d'après la relation (55) appliquée à la surface S',

$$I'_{aa'} = \frac{I'_{xa'} I'_{ax'}}{I'_{xx'}} + \frac{I'_{ya'} I'_{ay'}}{I'_{yy'}} + \ldots,$$

$$I'_{bb'} = \frac{I'_{xb'} I'_{bx'}}{I'_{xx'}} + \frac{I'_{yb'} I'_{by'}}{I'_{yy'}} + \ldots;$$

on a des valeurs analogues pour $I'_{cc'}$ et $I'_{dd'}$. Substituons ces valeurs dans $\sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}}$ et appelons K la valeur de cette expression, nous trouvons

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{I'_{xx'}}\left(\frac{I'_{xa'}I'_{ax'}}{I'_{aa'}} + \frac{I'_{xb'}I'_{bx'}}{I'_{bb'}} + \ldots\right) \\ & + \frac{1}{I'_{yy'}}\left(\frac{I'_{ya'}I'_{ay'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{yb'}I'_{by'}}{I_{bb'}} + \ldots\right) + \ldots . \end{aligned}$$

Or, d'après (58), la première parenthèse a pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}I'_{xx'}$; la seconde a pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}}I'_{yy'}\ldots$.

On a, par suite,

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}} + \frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}} + \ldots\right);$$

le théorème est donc démontré, et l'on voit de plus que dans la relation (a) les deux sommes $\sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}}$ et $\sum \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}$ sont séparément constantes, quels que soient les tétraèdres polaires réciproques que l'on considère. De là ces deux théorèmes :

68. *On donne deux surfaces du second degré* S *et* S'; *si l'on désigne par* aa', bb', cc', dd' *quatre couples de points correspondants par rapport à* S (*déterminant deux tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$ *polaires réciproques à* S), *la somme*

$$(b) \qquad \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bb'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cc'}}{I_{cc'}} + \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}} = K$$

sera constante quel que soit le système des points considérés.

On donne deux surfaces du second degré S *et* S'; *si l'on désigne par* XX', YY', ZZ', TT' *quatre couples* *de plans correspondants par rapport à* S′ (*déterminant deux tétraèdres* XYZT, X′Y′Z′T′ *polaires réciproques à* S′), *la somme*

$$(c)\qquad \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}} + \frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}} + \frac{I_{ZZ'}}{I'_{ZZ'}} + \frac{I_{TT'}}{I'_{TT'}} = K\,\frac{\pi'^{2}}{\pi^{2}}$$

sera constante quel que soit le système des plans considérés.

Déterminations de la constante K. — La constante K ayant la même valeur quels que soient les tétraèdres polaires réciproques par rapport à S et à S′, en choisissant convenablement ces tétraèdres, on arrive à des valeurs simples de la constante K.

1° Supposant en premier lieu que le sommet d du tétraèdre $abcd$ coïncide avec le centre o de S et que les points a, b, c soient à l'infini sur les diamètres conjugués oa, ob, oc, le tétraèdre polaire $a'b'c'd'$ se confondra avec $abcd$, de sorte que

$$K = \frac{I'_a}{I_a} + \frac{I'_b}{I_b} + \frac{I'_c}{I_c} + \frac{I'_o}{I_o}.$$

Mais, si α, β, γ sont les longueurs des demi-diamètres de S dirigés suivant oa, ob, oc, et α', β', γ' les longueurs des demi-diamètres de S′ respectivement parallèles, on a, les points a, b, c étant à l'infini,

$$\frac{I'_a}{I_a} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2},\quad \frac{I'_b}{I_b} = \frac{\beta^2}{\beta'^2},\quad \frac{I'_c}{I_c} = \frac{\gamma^2}{\gamma'^2},$$

et comme, d'ailleurs, $I_0 = -1$,

$$K = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} + \frac{\beta^2}{\beta'^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma'^2} - I'_o.$$

2° On peut écrire

$$K = I'_o\left(\frac{I'_a}{I_a I'_o} + \frac{I'_b}{I_b I'_o} + \frac{I'_c}{I_c I'_o} + \frac{1}{I_o}\right);$$

désignons par $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ les points d'intersection de la surface S' avec les diamètres oa, ob, oc.

$$\frac{I'_a}{I_a I'_o} = \frac{\alpha^2}{oa_1 . oa_2}, \quad \frac{I'_b}{I_b I'_o} = \frac{\beta^2}{ob_1 . ob_2}, \quad \frac{I'_c}{I_c I'_o} = \frac{\gamma^2}{oc_1 . oc_2};$$

donc

$$K = I'_o \left(\frac{\alpha^2}{oa_1 . oa_2} + \frac{\beta^2}{ob_1 . ob_2} + \frac{\gamma^2}{oc_1 . oc_2} - 1 \right).$$

3° Par le centre o' de la surface S', menons trois diamètres conjugués à cette surface, $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$; les points $x'y'z'$ étant à l'infini, le tétraèdre $o'x'y'z'$ est à lui-même son polaire par rapport à S'. Soient X', Y', Z', T' les faces de ce tétraèdre, la dernière T' étant le plan de l'infini. Nous avons vu que

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{X'}}{I'_{X'}}.$$

Appelons X', Y', Z' les produits des demi-axes principaux des sections faites dans S' par les plans diamétraux X', Y', Z'; soient aussi X, Y, Z les produits des demi-axes des sections faites dans S par trois plans diamétraux X, Y, Z parallèles aux premiers, on a (53)

$$I_{X'} = \frac{(o, X')^2}{\pi^2} - \frac{1}{X^2}, \quad I'_{X'} = -\frac{1}{X'^2};$$

donc

$$\frac{I_{X'}}{I'_{X'}} = \frac{X'^2}{X^2} - \frac{(o, X')^2 X'^2}{\pi^2};$$

on a des valeurs analogues pour $\frac{I_{Y'}}{I'_{Y'}}$, $\frac{I_{Z'}}{I'_{Z'}}$.

Lorsque T' est un plan quelconque,

$$I_{T'} = \frac{(o, T')^2}{\pi^2} - \frac{1}{T^2}, \quad I'_{T'} = \frac{(o', T')^2}{\pi'^2} - \frac{1}{T'^2};$$

et, si ce plan est à l'infini,

$$\frac{I_{T'}}{I'_{T'}} = \frac{\pi'^2}{\pi^2},$$

de sorte que

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{X'^2}{X^2} + \frac{Y'^2}{Y^2} + \frac{Z'^2}{Z^2}\right)$$

$$- \frac{1}{\pi'^2}\left[(o, X')^2 X'^2 + (o, Y')^2 Y'^2 + (o, Z')^2 Z'^2 - \pi'^2\right].$$

Or, d'après (55), l'expression comprise dans la seconde parenthèse a pour valeur $\pi'^2 I'_0$; donc

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{X'^2}{X^2} + \frac{Y'^2}{Y^2} + \frac{Z'^2}{Z_2}\right) - I'_0.$$

4° Soient $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$, $Z_1 Z_2$ les plans tangents de S parallèles aux plans diamétraux X, Y, Z de S, et X'_1, Y'_1, Z'_1 des plans tangents de S' parallèles à ces mêmes plans, on a (53)

$$I_{X'} = \frac{(X', X_1)(X', X_2)}{\pi^2}, \quad I'_{X'} = -\frac{(X', X'_1)^2}{\pi'^2},$$

en désignant généralement par (X', X_1) la distance de deux plans parallèles X', X_1, d'où

$$\frac{I_{X'}}{I'_{X'}} = -\frac{(X', X_1)(X', X_2)}{(X', X'_1)^2}\frac{\pi'^2}{\pi^2};$$

donc

$$K = 1 - \frac{(X', X_1)(X', X_2)}{(X', X'_1)^2} - \frac{(Y', Y_1)(Y', Y_2)}{(Y', Y'_1)^2}$$

$$- \frac{(Z', Z_1)(Z', Z_2)}{(Z', Z'_1)^2}.$$

La comparaison de ces diverses valeurs de la constante K donne plusieurs théorèmes que chacun pourra énoncer.

(*A suivre.*)