NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 474-479
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__474_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 984

(voir 2e série, t. IX, p. 143);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.*

2° *Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux quatre points conjugués. De plus, les deux triangles formés par les diagonales des deux quadrilatères circonscrits à l'ellipse aux pieds des deux groupes de normales ont même surface.*

3° *Considérons deux quadrilatères inscrit et circonscrit. Les normales aux quatre points, sommets du premier et points de contact du second, sont concourantes. La diagonale du quadrilatère circonscrit est symétrique par rapport à l'un des axes de l'ellipse de la droite joignant les milieux des côtés du quadrilatère inscrit, qui sont les polaires des extrémités de la diagonale considérée.* (A. SARTIAUX.)

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées de quatre points de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x'_4, y'_4 les coordonnées des points correspondants d'une ellipse homographique.

L'équation de la normale au point (x_1, y_1) de la première ellipse est

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Les conditions pour que les normales aux quatre points considérés concourent en un même point sont donc

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les conditions pour que les normales aux quatre points correspondants de l'ellipse homographique concourent en un même point seront de même

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & x'_1 y'_1 \\ x'_2 & y'_2 & x'_2 y'_2 \\ x'_3 & y'_3 & x'_3 y'_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & x'_1 y'_1 \\ x'_2 & y'_2 & x'_2 y'_2 \\ x'_4 & y'_4 & x'_4 y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons qu'on n'altère pas ces équations en changeant les signes de tous les termes d'une colonne, ou en les multipliant par un même nombre.

1° Cela posé, si les ellipses homographiques ont même grand axe, cet axe étant à lui-même son homologue, les formules de correspondance sont

$$x' = \pm x, \quad y' = \beta y.$$

Or, si dans les équations (1) on multiplie les deux dernières colonnes par β, on obtient, en vertu des formules de correspondance, les équations (2). Donc : *Si les normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.*

2° Les formules, pour passer d'un point à son conjugué, sont

$$x' = \pm \frac{a}{b} y, \quad y' = \mp \frac{b}{a} x.$$

Si, dans les équations (1), on multiplie les trois colonnes respectivement par $\pm \frac{a}{b}$, $\mp \frac{b}{a}$, -1, ce qui ne change rien, on obtiendra, en vertu des formules de correspondance, les équations (2). Donc : *Si les normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en est de même des normales aux quatre points conjugués.*

L'ellipse et les deux quadrilatères circonscrits peuvent être considérés comme la projection d'un cercle et de deux quadrilatères circonscrits, dont les points de contact sont respectivement distants de 90 degrés, et qui, par suite, coïncideraient si l'on faisait tourner l'un d'eux de 90 degrés autour du centre. Ces derniers quadrilatères sont donc égaux, ainsi que les triangles formés par leurs diagonales; donc les projections des quadrilatères sont équivalentes, ainsi que celles des triangles.

3° La troisième partie du théorème est évidemment inexacte. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le rectangle circonscrit formé par les tangentes aux sommets. Une diagonale de ce rectangle et la droite qui joint les milieux des cordes, polaires de ces sommets, loin d'être symétriques par rapport à un axe, se confondent. D'ailleurs, dans le cas général, ces deux lignes sont toujours d'un même côté du centre, car les droites qui joignent le centre à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit passent par les milieux des cordes, qui sont les polaires de ces sommets.

Je me propose de chercher la condition pour que les deux droites en question soient parallèles.

Soient x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées de deux sommets opposés P, P_1 du quadrilatère circonscrit à l'ellipse

$$S = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

La polaire du point (x_1, y_1),

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 - a^2b^2 = 0,$$

coupe l'ellipse en deux points dont les coordonnées sont

$$x' = \frac{a^2(b^2x_1 + y_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y' = \frac{b^2(a^2y_1 - x_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2},$$

$$x'' = \frac{a^2(b^2x_1 - y_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y'' = \frac{b^2(a^2y_1 + x_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2},$$

en posant, pour abréger, $a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2 = S_1$.

Les normales à l'ellipse en ces points ont pour équations

$$a^2y'x - b^2x'y = c^2x'y',$$
$$a^2y''x - b^2x''y = c^2x''y''.$$

Elles se rencontrent en un point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{c^2x'x''(y' - y'')}{a^2(y'x'' - x'y'')}, \quad y = \frac{c^2y'y''(x' - x'')}{b^2(y'x'' - x'y'')},$$

ou

$$x = \frac{c^2x_1(b^2 - y_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y = \frac{c^2y_1(a^2 - x_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}.$$

Les coordonnées du point de rencontre des normales menées aux points où la polaire du point P_1 (x_2, y_2) rencontre l'ellipse sont de même

$$x = \frac{c^2x_2(b^2 - y_2^2)}{a^2y_2^2 + b^2x_2^2}, \quad y = \frac{c^2y_2(a^2 - x_2^2)}{a^2y_2^2 + b^2x_2^2}.$$

Pour que les quatre normales concourent en un même point, il faut que l'on ait

$$\frac{x_1(b^2-y_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}=\frac{x_2(b^2-y_2^2)}{a^2y_2^2+b^2x_2^2} \text{ et } \frac{y_1(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}=\frac{y_2(a^2-x_2^2)}{a^2y_2^2+b^2x_2^2},$$

équations qui sont satisfaites par

$$x_1x_2=-a^2,\quad y_1y_2=-b^2;$$

et comme d'un point on ne peut mener que quatre normales à une ellipse, ces deux conditions, qui sont suffisantes, sont aussi nécessaires.

Soient M et M_1 les milieux des cordes, polaires des points P et P_1, les points O, M, P sont en ligne droite ainsi que O, M_1, P_1 (O est le centre de l'ellipse).

Les droites PP_1, MM_1 seront parallèles, si l'on a

$$\frac{OM}{OP}=\frac{OM_1}{OP_1}.$$

Les coordonnées du point M sont

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{a^2b^2x_1}{a^2y_1^2+b^2x_1^2},\quad y=\frac{a^2b^2y_1}{a^2y_1^2+b^2x_1^2},$$

$$\overline{OM}^2=\frac{a^4b^4(x_1^2+y_1^2)}{(a^2y_1^2+b^2x_1^2)^2};$$

donc

$$\frac{OM}{OP}=\frac{a^2b^2}{a^2y_1^2+b^2x_1^2};$$

de même

$$\frac{OM_1}{OP_1}=\frac{a^2b^2}{a^2y_2^2+b^2x_2^2}.$$

Pour que les droites PP_1, MM_1 soient parallèles (ou coïncidentes), il faut donc que l'on ait

$$a^2y_1^2+b^2x_1^2=a^2y_2^2+b^2x_2^2=\frac{a^2b^4}{y_1^2}+\frac{a^4b^2}{x_1^2}$$
$$=\frac{a^2b^2(a^2y_1^2+b^2x_1^2)}{x_1^2y_1^2},$$

ou

$$(a^2y_1^2+b^2x_1^2)(x_1^2y_1^2-a^2b^2)=0,$$
$$x_1^2y_1^2-a^2b^2=0,$$

c'est-à-dire que le point P doit se trouver sur l'une des hyperboles

$$xy=ab,\quad xy=-ab.$$

Le point P_1 appartient à l'autre branche de la même hyperbole.

Lorsque le point P décrit l'hyperbole $xy=ab$, le point de rencontre des normales décrit une ligne dont on obtient l'équation en éliminant x_1, y_1 entre les équations

$$x=\frac{c^2x_1(b^2-y_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2},\quad y=\frac{c^2y_1(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}\quad \text{et}\quad x_1y_1=ab.$$

On trouve

$$ax+by=0,$$

et

$$ax-by=0,$$

si le point P décrit une branche de l'hyperbole $xy=-ab$.

Ainsi, quand le point P, qui détermine les quatre sommets du quadrilatère circonscrit, tel que les normales aux quatre points de contact concourent en un même point, décrit une branche de l'une des hyperboles conjuguées $xy=\pm ab$, le point de concours des normales décrit la portion de droite

$$ax\pm by=0,$$

comprise dans la développée.