NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. ZOLOTAREFF

Sur la série de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 422-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__422_1>

SUR LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. G. ZOLOTAREFF,
Professeur à l'Université de Saint-Petersbourg.

Soit

$$(1) \qquad z = a + x\varphi(z)$$

une équation entre les variables x et z, et $F(z)$ une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

A cet effet, je considère une intégrale définie

$$S_n = \int_a^z [x\varphi(u) + a - u]^n F'(u)\, du.$$

En la différentiant par rapport au paramètre a, on aura

$$\frac{dS_n}{aa} = nS_{n-1} - x^n \varphi^n(a) F'(a);$$

il en résulte, en posant

$$n = 1, 2, \ldots, n,$$

les formules suivantes :

$$(1) \qquad S_0 = x\varphi(a) F'(a) + \frac{dS_1}{da},$$

$$(2) \qquad 2S_1 = x^2 \varphi^2(a) F'(a) + \frac{d^2 S_1}{da^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n) \qquad nS_{n-1} = x^n \varphi^n(a) F'(a) + \frac{dS_n}{da}.$$

Remplaçant maintenant dans la première équation S_1 par sa valeur tirée de la deuxième, puis S_2 par sa valeur tirée de la troisième équation, etc., on aura enfin

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_0 = {} & x\varphi(a) F'(a) + \frac{x^2}{1.2} \frac{d[\varphi(a) F'(a)]}{da} \\ & + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^2[\varphi^2(a) F'(a)]}{da^2} + \ldots + R_n, \end{aligned} \right.$$

R_n désignant, pour abréger, la quantité

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n}{da^n} \left\{ \int_a^z [x\varphi(u) + a - u]^n F'(u) du \right\}.$$

En ayant égard à ce que

$$S_0 = F(z) - F(a),$$

on voit que la formule (α) présente la série de Lagrange avec le terme complémentaire R_n.

La formule (α) pour le terme complémentaire est due à M. Popoff.