NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Questions proposées au concours général, année 1875

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 365-373

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__365_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL, ANNÉE 1875

(voir p. 88 et 89);

PHILOSOPHIE.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

Deux triangles équilatéraux égaux ABC, A'B'C' *sont disposés dans deux plans parallèles de façon que les sommets de l'un et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du second sur le plan du premier soient les sommets d'un hexagone régulier. Les centres des deux triangles étant* O *et* O', *on demande de déterminer la figure du solide commun aux deux tétraèdres* O'ABC, OA'B'C', *et d'exprimer le volume de ce solide à l'aide du côté a des triangles équilatéraux et de la distance d de leurs plans.*

Menons les médianes AD, A'D' (**), elles sont égales et parallèles. Les droites OD, O'D' étant égales et parallèles, le quadrilatère ODO'D' est un parallélogramme :

(*) Extrait de recherches nouvelles sur les Ouvrages de Léonard de Pise, publiées par M. le prince B. Boncompagni.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

donc OD' est égale et parallèle à $O'D$; mais, par les conditions de l'énoncé, BC est aussi égale et parallèle à $B'C'$: donc les plans $O'BC$, $OB'C'$ sont parallèles. Il en est de même, pour une raison semblable, des plans $O'AC$, $OA'C'$ et des plans $O'AB$, $OA'B'$. Il s'ensuit que le volume commun aux deux tétraèdres, étant limité par six plans parallèles deux à deux, est un parallélépipède.

Soit E l'intersection des droites $O'A$, OD', contenues dans le plan $ODO'D'$. Les triangles semblables $O'ED'$, AEO donnent

$$\frac{O'E}{AE} = \frac{O'D'}{AO} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$O'E = \frac{1}{3} O'A.$$

Les arêtes latérales de chacun des tétraèdres sont coupées par les faces de l'autre au tiers de leur longueur à partir du sommet; et, à cause de l'égalité des arêtes latérales, les faces du parallélépipède sont des losanges égaux ayant pour côté le tiers des arêtes latérales des tétraèdres; la surface de chacun de ces losanges est les $\frac{2}{9}$ d'une face latérale des tétraèdres, puisqu'elle se compose de deux triangles semblables à cette face, et de côté trois fois moindre.

En prenant pour bases une face du parallélépipède et la face latérale du tétraèdre sur laquelle elle est appliquée, les hauteurs des deux solides sont dans le rapport $\frac{O'E}{O'A} = \frac{1}{3}$: donc le volume du parallélépipède est les $\frac{2}{9}$ de celui du tétraèdre, ou

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{12} d \times \frac{2}{9} = \frac{a^2 d\sqrt{3}}{54}.$$

Note. — Le même résultat a été trouvé par M. Wisselink.

SECONDE

(p. 88 et 89);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

I. *Lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites données est constante. Lieu géométrique des points dont la somme des distances à trois droites données est constante.*

Je démontrerai d'abord le théorème suivant :

Si deux points M_1, M_2 *sont tels que la somme des distances de chacun d'eux à plusieurs droites données est égale à une constante donnée* l, *tout point intermédiaire* M *de la droite qui les joint jouit de la même propriété, pourvu que cette droite ne traverse aucune des droites données.*

Je suppose que les droites données sont au nombre de trois.

Soient x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x, y, z les distances des points M_1, M_2, M à ces droites. Si, du point M_1, on abaisse des perpendiculaires sur les distances, les triangles semblables donneront, en grandeur et en signe :

$$\frac{x - x_1}{MM_1} = \frac{x_2 - x_1}{M_2M_1}; \quad \frac{y - y_1}{MM_1} = \frac{y_2 - y_1}{M_2M_1}; \quad \frac{z - z_1}{MM_1} = \frac{z_2 - z_1}{M_2M_1}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{(x + y + z) - (x_1 + y_1 + z_1)}{MM_1} = \frac{(x_2 + y_2 + z_2) - (x_1 + y_1 + z_1)}{M_2M_1}.$$

Or le second membre de cette dernière égalité est nul par hypothèse : donc le premier membre l'est aussi, et l'on a

$$x + y + z = x_1 + y_1 + z_1 = l. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1° Soient deux droites L, L′ qui se coupent en O. Menons à la distance donnée l une parallèle à L, qui coupe L′ en un point A; puis, prenons les droites OB = OC = OD = OA.

Les quatre points A, B, C, D seront évidemment des points du lieu demandé, qui, en vertu du théorème démontré, sera formé par le périmètre du rectangle ABCD. Les prolongements des côtés de ce rectangle appartiennent au lieu des points dont la différence des distances aux deux droites données est égale à l.

Les deux droites données, L, L′ peuvent être parallèles; soit d leur distance.

$l > d$. Le lieu se compose de deux parallèles menées à la distance $\frac{l}{2}$ de la parallèle équidistante des deux droites données.

$l = d$. Le lieu est la partie du plan comprise entre les deux parallèles L, L′.

$l < d$. Il n'y a pas de solution.

2° Si l'on donne trois droites, on déterminera les points du lieu, situés sur chacune d'elles, ce qui rentre dans le cas précédent, puisque l'une des trois distances devient nulle. Il n'y aura plus qu'à joindre ces points par des droites qui ne traversent pas les droites données. Le lieu sera donc, en général, le périmètre d'un hexagone ayant ses sommets deux à deux, sur les droites données (*).

II. *Construire un triangle* MNP, *sachant que ses côtés vont passer par trois points fixes* A, B, C; *que les*

(*) M. Moret-Blanc a fait suivre cette solution d'une discussion assez étendue, relative aux différentes positions des trois droites données dans leur plan. Nous regrettons de devoir, faute d'espace, laisser cette discussion à faire au lecteur.

sommets M *et* N *sont sur un cercle fixe passant par les points* A *et* B; *et enfin que l'angle* P *a une valeur donnée.*

L'angle P formé par les lignes AM, BN a pour mesure la demi-somme, ou la demi-différence des arcs AB et MN, suivant que le point P est intérieur, ou extérieur au cercle. Comme on connaît l'angle P, on en déduira l'arc MN et la corde MN (*).

III. *Étant donnée une équation du second degré, former les équations qui ont pour racines :*

1° *Les carrés des racines de la première;*

2° *Les inverses des racines de la première;*

Rechercher quels doivent être les coefficients de la première équation pour que l'équation qui admet pour racines les carrés des racines de la première ne diffère pas de cette équation.

Soient

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0$$

l'équation donnée, et

$$(2) \qquad X^2 + PX + Q = 0$$

une seconde équation.

Si x', x'' sont les racines de la première, on a

$$x' + x'' = -p, \quad x'x'' = q,$$

et, si l'équation (2) a pour racines les carrés des racines de l'équation (1),

$$P = -(x'^2 + x''^2) = 2q - p^2, \quad Q = (x'x'')^2 = q^2.$$

(*) La question est ainsi réduite à mener par le point C une sécante CMN au cercle ABMN, telle que sa partie MN comprise dans l'intérieur du cercle soit égale à une droite donnée. La discussion du problème proposé n'offre que peu d'intérêt et aucune difficulte. (G.)

L'équation (2) devient alors

$$X^2 + (2q - p^2) X + q^2 = 0.$$

Pour qu'elle soit identique à l'équation (1), il faut qu'on ait

$$q^2 = q,$$

d'où

$$q = 1 \text{ ou } q = 0$$

et

$$2q - p^2 = p.$$

Pour $q = 1$, l'égalité $2q - p^2 = p$ devient

$$p^2 + p - 2 = 0,$$

d'où

$$p = 1 \quad \text{ou} \quad p = -2;$$

et pour $q = 0$,

$$p^2 + p = 0,$$

d'où

$$p = 0 \quad \text{ou} \quad p = -1.$$

Si $q = 1$ et $p = 1$, les racines de l'équation (1) sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2};$$

chacune d'elles est le carré de l'autre.

Si $q = 1$ et $p = -2$, les deux racines sont égales à l'unité.

Pour $q = 0$, $p = 0$, les deux racines se réduisent à 0.

Quand $q = 0$ et $p = -1$ les racines sont 0 et 1.

Lorsque les racines de l'équation

$$(2) \qquad X^2 + PX + Q = 0$$

sont les inverses des racines de l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$P = -\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) = -\left(\frac{x' + x''}{x'x''}\right) = \frac{p}{q}$$

et

$$Q = \frac{1}{x'x''} = \frac{1}{q},$$

et l'équation (2) devient

$$X^2 + \frac{p}{q}X + \frac{1}{q} = 0, \quad \text{ou} \quad qX^2 + pX + 1 = 0.$$

On arrive aussi à cette dernière équation en remplaçant x par $\frac{1}{X}$, dans l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par M. Wisselink.

RHÉTORIQUE

(p. 88).

SOLUTION DE M. WISSELINK.

Une sphère est posée sur un plan horizontal; sur le même plan repose par sa base un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère : on demande de couper ces deux corps par un plan horizontal, de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

Soient R et r les rayons de la sphère et de la base du cône; m, n les deux nombres donnés; x la distance du sommet du cône au plan sécant. Les sections faites dans la sphère et le cône par ce plan auront respectivement les valeurs

$$\pi x(2R - x), \quad \frac{\pi r^2 x^2}{4R^2},$$

dont le rapport est

$$\frac{4(2R - x)R^2}{r^2 x}.$$

L'inconnue x sera déterminée par l'équation

$$\frac{4(2R-x)R^2}{r^2x}=\frac{m}{n},$$

qui donne

$$x=\frac{8nR^3}{4nR^2+mr^2}.$$

Pour $m=n$, on a

$$x=\frac{8R^3}{4R^2+r^2};$$

et pour $m=n$ et $R=r$, on a

$$x=\frac{8}{5}R.$$

Note. — Même solution de M. Moret-Blanc.

TROISIÈME

(p. 89).

SOLUTION DE M. WISSELINK.

1. *Inscrire dans un cercle un triangle* ABC, *dont l'angle* A *est connu, et dont les deux côtés* AC *et* BC *sont tangents à deux cercles donnés.*

L'angle A étant connu, on peut déterminer immédiatement la grandeur du côté BC, et la distance de ce côté au centre O du cercle dans lequel il faut inscrire le triangle ABC. La droite BC sera tangente à la circonférence décrite du point O comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au côté BC. Or, d'après l'énoncé de la question proposée, la même droite BC est tangente à une autre circonférence donnée; il s'ensuit que BC est une tangente commune à deux circonférences déterminées. Ce qui donne, en général, quatre directions différentes au côté BC. Pour déterminer le troisième sommet A du triangle correspondant à chacune des quatre positions de la base BC, il restera à mener, par le point C, des tangentes à celui des deux cercles donnés que le côté AC doit toucher.

Il faut observer toutefois que, dans un triangle résultant de cette construction, l'angle A peut être le supplément de l'angle donné.

II. *Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction périodique simple de* un, deux *ou* quatre *chiffres.*

On sait que, pour déterminer les valeurs des dénominateurs n, des fractions $\frac{1}{n}$ dont la réduction en décimales donne des fractions périodiques simples de *un, deux* ou *quatre* chiffres, il faut d'abord chercher les nombres n qui divisent exactement

$$10 - 1,\ 10^2 - 1,\ 10^4 - 1.$$

On en conclura, d'après des théorèmes bien connus, que *les valeurs des dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en décimales, donnent naissance à des fractions décimales périodiques simples de* un, deux *ou* quatre *chiffres,* sont respectivement :

3, 9;
11, 33, 99;
101, 3.101, 9.101, 11.101, 33.101, 33.3.101.