

J.-J.-A. MATHIEU

**Quelques propriétés des coniques inscrites  
ou circonscrites au quadrilatère**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 354-359

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_354\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__354_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES INSCRITES  
OU CIRCONSCRITES AU QUADRILATÈRE ;**

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,  
Chef d'escadron d'artillerie.

---

Dans les questions sur les courbes inscrites ou circonscrites au quadrilatère, on peut tirer parti d'un théo-

rème, dont le calcul des déterminants fournit d'ailleurs une démonstration si simple que je me bornerai à l'énoncer.

1. THÉORÈME. — Lorsque quatre droites sont telles que trois quelconques ne concourent pas, il est permis d'admettre que leurs équations ont été préparées de manière à donner l'identité

$$(1) \quad A + B + C + D = 0.$$

C'est ce que je supposerai dans ce qui va suivre, où

$$A = a_1x + a_2y + a_0 = 0,$$

$$B = p_1x + p_2y + p_0 = 0,$$

.....

représenteront des équations générales de droites ;  $A_0$  et  $P_0$  les résultats de la substitution des coordonnées  $x_0, y_0$  d'un point particulier, dans ces équations.

2. *Exemple.* — Lorsqu'on prend pour axes deux diagonales d'un quadrilatère complet, pour avoir l'identité (1), il suffit d'écrire les équations des côtés ainsi :

$$A = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

$$B = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0,$$

$$- C = \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} - 1 = 0,$$

$$- D = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

3. *Corollaires.* — Parmi les conséquences variées qu'on peut tirer du théorème (1), j'indiquerai seulement certaines équations qu'on aura besoin de reconnaître par la suite.

*Équations des diagonales du quadrilatère.*

$$P = \pm (A + B) = \mp (C + D) = 0,$$

$$Q = \pm (A + C) = \mp (B + D) = 0,$$

$$R = \pm (A + D) = \mp (B + C) = 0.$$

*Équations des droites qui joignent l'intersection de deux diagonales aux sommets de la troisième.*

$$P + Q = \pm (A - D) = 0 \quad \text{et} \quad P - Q = \pm (B - C) = 0,$$

$$P + R = \pm (A - C) = 0 \quad \text{et} \quad P - R = \pm (B - D) = 0,$$

$$Q + R = \pm (A - B) = 0 \quad \text{et} \quad Q - R = \pm (C - D) = 0.$$

*Equation générale des coniques tangentes à quatre droites.*

$$(\mu A + \mu' B - \mu'' C)^2 - 4\mu\mu' AB = 0,$$

pour

$$\mu + \mu' + \mu'' = 0;$$

d'où

$$\lambda P^2 + \lambda' Q^2 + \lambda'' R^2 = 0,$$

pour

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} = 0.$$

*Coniques inscrites au quadrilatère.*

4. THÉORÈME. — Le lieu des pôles d'une droite fixe est une autre droite; ces deux lignes sont telles que leurs points d'intersection avec chaque diagonale sont conjugués harmoniques des sommets.

Ce théorème fournit un moyen de trouver, d'une manière assez simple, les points de contact de la conique tangente à cinq droites, car ce point est, pour chaque droite, celui où elle est rencontrée par sa conjuguée, prise relativement au quadrilatère des quatre autres droites.

Il comprend, comme cas particulier, lorsque la droite

fixe est à l'infini, le théorème sur le lieu des centres des coniques inscrites, car la conjuguée, passant alors par les milieux des diagonales, fournit ce lieu.

Pour démontrer le théorème (4), on n'a qu'à identifier, terme à terme, l'équation de la polaire qui contient un coefficient dont on est maître, avec celle d'une droite

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0, \text{ ce qui donne}$$

$$\lambda P p_1 + \lambda' Q q_1 + \lambda'' R r_1 = \frac{1}{\alpha},$$

$$\lambda P p_2 + \lambda' Q q_2 + \lambda'' R r_2 = \frac{1}{\beta},$$

$$\lambda P p_3 + \lambda' Q q_3 + \lambda'' R r_3 = -1.$$

Soient

$$D = \begin{vmatrix} p_1 q_1 r_1 \\ p_2 q_2 r_2 \\ p_3 q_3 r_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} q_1 r_1 \frac{1}{\alpha} \\ q_2 r_2 \frac{1}{\beta} \\ q_3 r_3 - 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} r_1 p_1 \frac{1}{\alpha} \\ r_2 p_2 \frac{1}{\beta} \\ r_3 p_3 - 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 q_1 \frac{1}{\alpha} \\ p_2 q_2 \frac{1}{\beta} \\ p_3 q_3 - 1 \end{vmatrix};$$

on trouvera

$$\frac{P}{D_1} + \frac{Q}{D_2} + \frac{R}{D_3} = 0.$$

on peut étudier les propriétés de cette droite, en se plaçant dans les conditions de l'exemple (1), où l'on a

$$P = x \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right) + y \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} \right) - 2,$$

$$Q = y \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right),$$

$$R = x \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right).$$

5. *Solutions des questions 1199 et 1200.*

Pour l'équation de l'enveloppe de la polaire d'un point fixe  $(x_0, y_0)$ , on trouvera sans difficulté

$$(PP_0 + QQ_0 - RR_0)^2 - 4PQP_0Q_0 = 0,$$

ce qui est l'équation d'une conique tangente aux trois diagonales, aux points où elles sont rencontrées par les polaires du point fixe, prises relativement aux trois systèmes de droites que l'on obtient en joignant l'intersection de deux diagonales aux sommets de la troisième.

Quant au lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, on l'obtiendra, assez simplement, en prenant l'axe des  $x$  parallèle à cette direction, ce qui donne

$$\lambda Pp_1 + \lambda' Qq_1 + \lambda'' Rr_1 = 0.$$

Dans ces conditions, le lieu est représenté par l'équation du troisième degré

$$\frac{P}{Qr_1 - Rq_1} + \frac{Q}{Rp_1 - Pr_1} + \frac{R}{Pq_1 - Qp_1} = 0.$$

*Coniques circonscrites au quadrilatère.*

Je me bornerai à mentionner deux théorèmes dont les démonstrations sont extrêmement simples.

6. THÉORÈME. — Le lieu des pôles d'une droite fixe est une conique passant par neuf points, savoir : les centres des trois systèmes de cordes communes et les conjugués harmoniques, relativement aux sommets, des points d'intersection de la droite avec chacune des six cordes.

En d'autres termes : si l'on coupe par une droite les

trois systèmes de droites qui passent par quatre points, les conjugués harmoniques des six points d'intersection, relativement aux sommets du quadrilatère, sont sur une conique circonscrite au triangle formé par les centres des systèmes de droites.

Comme cas particulier, lorsque la droite est à l'infini, on retrouve la conique des neuf points, lieu des centres des coniques circonscrites.

7. THÉORÈME. — Les polaires d'un point fixe concourent en un point qui est l'intersection des polaires du premier, prises relativement à chacun des trois systèmes de cordes communes.

Cette propriété fournit un moyen de construire les tangentes de la conique déterminée par cinq points.