

FAURE

## **Théorie des indices**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 339-354

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_339\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__339_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'artillerie.

[SUITE (\*).]

*Relations entre deux groupes de m droites.*

33. *Notations.* — Étant pris dans l'espace deux groupes de  $m$  points  $ab \dots m$ ;  $a' b' \dots m'$ ; joignons tous ces points au centre  $o$  de la surface  $S$  par les droites  $\alpha, \beta, \dots, \mu, \alpha' \beta', \dots, \mu'$ ; et posons

$$\delta'_m = \begin{vmatrix} I_{\alpha\alpha'} & I_{\alpha\beta'} & \dots & I_{\alpha\mu'} & \frac{1}{oa} \\ I_{\beta\alpha'} & I_{\beta\beta'} & \dots & I_{\beta\mu'} & \frac{1}{ob} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{\mu\alpha'} & I_{\mu\beta'} & \dots & I_{\mu\mu'} & \frac{1}{om} \\ \frac{1}{oa'} & \frac{1}{ob'} & \dots & \frac{1}{om'} & 0 \end{vmatrix}.$$

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série. t. XV, p. 251. 292.

Étant pris deux groupes de  $m$  directions arbitraires  $\alpha, \beta, \dots, \mu; \alpha', \beta' \dots, \mu'$ , posons

$$\alpha_m = \begin{vmatrix} \cos \alpha\alpha' & \cos \alpha\beta' & \dots & \cos \alpha\mu' \\ \cos \beta\alpha' & \cos \beta\beta' & \dots & \cos \beta\mu' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \mu\alpha' & \cos \mu\beta' & \dots & \cos \mu\mu' \end{vmatrix},$$

$$\alpha'_m = \begin{vmatrix} \cos \alpha\alpha' & \cos \alpha\beta' & \dots & \cos \alpha\mu' & 1 \\ \cos \beta\alpha' & \cos \beta\beta' & \dots & \cos \beta\mu' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \mu\alpha' & \cos \mu\beta' & \dots & \cos \mu\mu' & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta_m = \begin{vmatrix} \sin^2 \frac{\alpha\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\alpha\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\alpha\mu'}{2} \\ \sin^2 \frac{\beta\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\beta\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\beta\mu'}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^2 \frac{\mu\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\mu\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\mu\mu'}{2} \end{vmatrix},$$

$$\beta'_m = \begin{vmatrix} \sin^2 \frac{\alpha\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\alpha\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\alpha\mu'}{2} & 1 \\ \sin^2 \frac{\beta\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\beta\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\beta\mu'}{2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^2 \frac{\mu\alpha'}{2} & \sin^2 \frac{\mu\beta'}{2} & \dots & \sin^2 \frac{\mu\mu'}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Déterminant  $\delta'_m$ .

34. Le déterminant  $\Delta'_m$  (27) peut se mettre sous la forme

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} I_{aa'} + 1 & I_{ab'} + 1 & \dots & I_{am'} + 1 & 1 \\ I_{ba'} + 1 & I_{bb'} + 1 & \dots & I_{bm'} + 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{ma'} + 1 & I_{mb'} + 1 & \dots & I_{mm'} + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remarque ensuite que (11)

$$I_{aa'} + 1 = - oa . oa' I_{aa'}, \quad I_{ab'} + 1 = oa . ob' I_{ab'}, \quad \dots,$$

on trouvera, en posant

$$oa . ob' \dots om = P_m, \quad oa' . ob' \dots om' = P'_m,$$

la relation

$$\delta'_m = \frac{\Delta'_m (-1)^{m-1}}{P_m P'_m}.$$

Des valeurs de  $\Delta'_m$ , on déduit ce théorème :

*Si l'on mène par le centre o de la surface S deux groupes de m droites  $\alpha\beta\dots\mu$ ,  $a'\beta'\dots\mu'$  aux deux groupes de points  $ab\dots m$ ;  $a'b'\dots m'$  :*

1° Le déterminant  $\delta'_m$  est nul pour m plus grand que 4.

2° Si  $m = 4$ ,

$$\delta'_4 = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\sin \alpha}{oa} + \frac{\sin \beta}{ob} + \frac{\sin \gamma}{oc} + \frac{\sin \delta}{od} \right) \left( \frac{\sin \alpha'}{oa'} + \frac{\sin \beta'}{ob'} + \frac{\sin \gamma'}{oc'} + \frac{\sin \delta'}{od'} \right),$$

en désignant par  $\sin \alpha$  le sinus de l'angle solide formé par les trois autres directions  $\beta, \gamma, \delta$ , par  $\sin \beta$  le sinus de l'angle solide formé par les directions  $\alpha, \gamma, \delta$ , . . . .

3° Si  $m = 3$ ,

$$\delta'_3 = \frac{\sin \alpha \beta \gamma \sin \alpha' \beta' \gamma'}{(o, D)(o, D')} I_{D_0, D'_0};$$

D et D' sont les plans  $abc$ ,  $a'b'c'$ ;  $D_0, D'_0$  les plans diédraux parallèles à ces plans.

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$\delta'_2 = - \frac{\sin \alpha \beta . \sin \alpha' \beta'}{(o, \gamma)(o, \gamma')} I_{\gamma_0, \gamma'_0},$$

$\gamma$  et  $\gamma'$  désignant ici les droites  $ab, a'b'$ ;  $\gamma_0, \gamma_0'$  les diamètres de la surface, parallèles à ces droites.

*Démonstration.* — Lorsque  $m$  est plus grand que 4,  $\Delta'_m = 0$ , donc aussi  $\delta'_m$ . Lorsque  $m = 4$ , on a

$$\delta'_4 = \frac{36abcd \cdot a'b'c'd'}{\pi^2 P_4 P'_4};$$

or le volume  $abcd$  est la somme algébrique des quatre volumes  $ocbd, oacd, obad, oabc$ , et l'on a

$$6ocbd = oc \cdot ob \cdot od \sin \alpha, \quad 6oacd = oa \cdot oc \cdot od \sin \beta, \dots,$$

et par suite

$$\frac{6abcd}{P_4} = \frac{\sin \alpha}{oa} + \frac{\sin \beta}{ob} + \frac{\sin \gamma}{oc} + \frac{\sin \delta}{od},$$

et l'on a une valeur analogue pour  $\frac{6a'b'c'd'}{P'_4}$ ; ce qui démontre la deuxième partie.

Nous avons ensuite

$$\delta'_4 = \frac{4abc \cdot a'b'c' I_{D_4} D'_4}{P_3 P'_3};$$

or,

$$\frac{2abc}{P_3} = \frac{2abc(o, D)}{P_3(o, D)} = \frac{oa \cdot ob \cdot oc \sin \alpha \beta \gamma}{P_2(o, D)} = \frac{\sin \alpha \beta \gamma}{(o, D)}.$$

On a de même

$$\frac{2a'b'c'}{P'_3} = \frac{\sin \alpha' \beta' \gamma'}{(o, D')}.$$

ce qui démontre la troisième partie.

La dernière se prouve d'une manière analogue.

Dans la valeur de  $\delta'_4$  nous avons supposé le point  $o$  à l'intérieur des tétraèdres  $abcd, a'b'c'd'$ ; si cette condition n'était pas remplie, il faudrait changer les signes de quelques termes. On peut également la considérer comme générale en attribuant des signes aux sinus des angles solides.

*Déterminant  $\alpha_m$ .*

35. Lorsque la surface S est une sphère, les éléments du déterminant  $\delta_m$  ont pour valeur

$$I_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos \alpha z'}{R^2}, \quad I_{\alpha\beta'} = -\frac{\cos \alpha\beta'}{R^2}, \quad \dots, \quad I_{\alpha\mu'} = -\frac{\cos \alpha\mu'}{R^2}, \dots,$$

de sorte que

$$\alpha_m = (-R^2)^m \delta_m.$$

Comme d'ailleurs les directions  $\alpha\beta\dots\mu$ ,  $\alpha'\beta'\dots\mu'$  qui figurent dans le déterminant  $\alpha_m$  peuvent être considérées comme étant parallèles à des directions arbitraires de l'espace, nous pouvons dire :

*Si l'on a dans l'espace deux groupes de m directions arbitraires  $\alpha\beta\dots\mu$ ,  $\alpha'\beta'\dots\mu'$  :*

1° Lorsque m est plus grand que 3,

$$\alpha_m = 0.$$

2° Lorsque m = 3,

$$\alpha_3 = \sin \alpha\beta\gamma \sin \alpha'\beta'\gamma'.$$

3° Lorsque m = 2,

$$\alpha_2 = \sin \alpha\beta \sin \alpha'\beta' \cos \widehat{(\alpha\beta, \alpha'\beta')}.$$

*Remarque.* — Si les droites  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont parallèles à un même plan,  $\alpha_3 = 0$ .

*Déterminant  $\alpha'_m$ .*

36. Lorsque la surface S est une sphère, on voit que

$$\delta'_m = \begin{vmatrix} \cos \alpha z' & \cos \alpha\beta' & \dots & \cos \alpha\mu' & \frac{1}{oa} \\ \cos \beta z' & \cos \beta\beta' & \dots & \cos \beta\mu' & \frac{1}{ob} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \mu z' & \cos \mu\beta' & \dots & \cos \mu\mu' & \frac{1}{om} \\ \frac{1}{oa'} & \frac{1}{ob'} & \dots & \frac{1}{om'} & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{(-R^2)^{m-1}}.$$

Et, si tous les points  $ab\dots m, a'b'\dots m'$  sont situés sur la sphère de rayon  $R$ ,

$$\alpha'_m = - (-R^2)^m \delta'_m.$$

Les valeurs de  $\delta'_m$  conduisent à ce théorème :

*Si l'on a dans l'espace deux groupes de  $m$  directions arbitraires  $\alpha\beta\dots\mu, \alpha'\beta'\dots\mu'$  :*

1° Lorsque  $m$  est plus grand que 4,

$$\alpha'_m = 0.$$

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$\alpha'_4 = -(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)(\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' + \sin\delta').$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$\alpha'_3 = -\sin\alpha\beta\gamma \sin\alpha'\beta'\gamma' \frac{\cos\varphi}{\cos\mu \cos\mu'},$$

$\mu, \mu'$  indiquant les angles générateurs des cônes droits qui contiennent les directions  $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$  transportées parallèlement en un même point,  $\varphi$  l'angle formé par les axes de ces cônes.

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$\alpha'_2 = -4 \sin \frac{\alpha\beta}{2} \sin \frac{\alpha'\beta'}{2} \cos\psi,$$

$\psi$  étant l'angle que forment les plans bissecteurs des directions  $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ .

*Démonstration.* — Les deux premières parties du théorème sont évidentes d'après les valeurs de  $\delta'_m$  et  $\delta'_4$ .

3° Les directions  $\alpha, \beta, \gamma$  transportées au centre  $o$  de la sphère parallèlement à elles-mêmes coupent cette sphère aux points  $abc$  déterminant le plan  $D$ ; de même les directions  $\alpha'\beta'\gamma'$ , transportées au centre  $o$ , détermineront le plan  $a'b'c'$  ou  $D'$ . Que l'on imagine les deux cônes droits qui passent par les droites  $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$ , et soient  $\mu, \mu'$

les angles générateurs de ces cônes,  $(o, D) = R \cos \mu$ ,  $(o, D') = R \cos \mu'$ . Si  $\varphi$  est l'angle formé par les axes de ces cônes, l'indice du système des plans diamétraux parallèles aux plans  $D, D'$  a pour valeur  $I_{D, D'} = -\frac{\cos \varphi}{R^2}$ ; ces valeurs, substituées dans l'expression de  $\delta'_3$ , donnent  $\alpha'_3$ .

4° Les directions  $\alpha, \beta$ , transportées parallèlement au centre  $o$ , coupent la sphère aux points  $ab$  déterminant la droite  $\gamma$ ; de même les directions  $\alpha', \beta'$ , transportées au centre  $o$ , coupent la sphère aux points  $a'b'$ , déterminant la droite  $\gamma'$ ,

$$(o, \gamma) = R \cos \frac{\alpha\beta}{2}, \quad (o, \gamma') = R \cos \frac{\alpha'\beta'}{2};$$

d'autre part,

$$I_{\gamma, \gamma'} = -\frac{\cos \gamma\gamma'}{R^2} = -\frac{\cos \psi}{R^2};$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de  $\delta'_2$ , donnent  $\alpha'_2$ .

*Déterminant  $\beta_m$ .*

37. Si l'on a dans l'espace deux groupes de  $m$  directions arbitraires  $\alpha\beta \dots \mu, \alpha'\beta' \dots \mu'$ :

1° Lorsque  $m$  est plus grand que 4,

$$\beta_m = 0.$$

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$\beta_4 = -\frac{1}{16} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta) (\sin \alpha' + \sin \beta' + \sin \gamma' + \sin \delta').$$

3° Lorsque  $m = 3$ , si l'on désigne par  $\mu, \mu'$  les angles générateurs des cônes droits qui passent par les directions  $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$  transportées en un même point, et par  $\theta$  l'angle sur lequel se coupent ces cônes,

$$\beta_3 = -\frac{1}{8} \sin \alpha\beta\gamma \sin \alpha'\beta'\gamma' \tan \mu \tan \mu' \cos \theta.$$



4° Lorsque  $m = 2$ , si l'on désigne par  $\psi$  l'angle que forment entre eux les plans bissecteurs des directions  $\alpha\beta$ ,  $\alpha'\beta'$  transportées en un même point,

$$\beta_2 = \sin \frac{\alpha\beta}{2} \sin \frac{\alpha'\beta'}{2} \left[ \cos \frac{\alpha\beta}{2} \cos \frac{\alpha'\beta'}{2} \cos(\alpha\beta, \alpha'\beta') - \cos\psi \right].$$

Par le centre  $o$  de la sphère  $S$  menons des parallèles aux droites et désignons par  $ab \dots m$ ,  $a'b' \dots m'$  les points où elles coupent la sphère. On a généralement

$$mm' = 4R^2 \sin^{-2} \frac{\alpha\alpha'}{2},$$

$mm'$  étant le carré de la distance  $mm'$ . Il suit de là que le déterminant  $b_m$  (30) a pour valeur  $(4R^2)^m \beta_m$ , d'où

$$\beta_m = \frac{b_m}{(4R^2)^m}.$$

Si dans l'expression de  $b_3$  on remplace les volumes  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$  par leurs valeurs

$$6abcd = R^3 \Sigma \sin \alpha, \quad 6a'b'c'd' = R^3 \Sigma \sin \alpha',$$

on trouvera  $\beta_3$ . Dans celle de  $b_3$ ,  $p$  représentant le produit des côtés du triangle  $abc$ , si  $r$  est le rayon du cercle circonscrit à ce triangle,

$$p = 4r \cdot abc;$$

mais

$$r = (o, D) \operatorname{tang} \mu \quad \text{et} \quad 2abc(o, D) = R^3 \sin \alpha\beta\gamma,$$

donc

$$p = 2R^3 \sin \alpha\beta\gamma \operatorname{tang} \mu,$$

et de même

$$p' = 2R^3 \sin \alpha'\beta'\gamma' \operatorname{tang} \mu'.$$

Dans la valeur de  $b_2$ , nous avons

$$ab = R \sin \frac{\alpha\beta}{2}, \quad (o, \gamma) = R \cos \frac{\alpha\beta}{2};$$

D est le plan  $\alpha\beta$ , enfin les plans diamétraux perpendiculaires aux cordes  $ab$ ,  $a'b'$  font entre eux un angle  $\psi$  et sont bissecteurs des angles  $\alpha\beta$ ,  $\alpha'\beta'$ .

38. Dans l'expression de  $b_3$  supposons les points  $abc$  dans un plan diamétral D, les points  $a'b'c'$  dans un plan diamétral D'

$$b_3 = 3_2 abc.a'b'c' R^2 \cos DD'.$$

Désignant comme ci-dessus par  $\alpha\beta\gamma$  les rayons  $oa$ ,  $ob$ ,  $oc$ , par  $\alpha'\beta'\gamma'$  les rayons  $oa'$ ,  $ob'$ ,  $oc'$ , on a

$$abc = \frac{R^2}{2} (\sin \alpha\beta + \sin \beta\gamma + \sin \gamma\alpha),$$

donc

$$b_3 = 8R^6 (\sin \alpha\beta + \sin \beta\gamma + \sin \gamma\alpha) \\ \times (\sin \alpha'\beta' + \sin \beta'\gamma' + \sin \gamma'\alpha') \cos DD'.$$

Revenant à la valeur de  $\beta_3 = \frac{b^3}{4^3 R^6}$ , on a ce théorème :

*Étant prises dans un plan D trois droites  $\alpha\beta\gamma$ , dans un plan D' trois droites  $\alpha'\beta'\gamma'$ , si l'on forme le déterminant  $\beta_3$ , on a*

$$\beta_3 = \frac{1}{8} (\sin \alpha\beta + \sin \beta\gamma + \sin \gamma\alpha) \\ \times (\sin \alpha'\beta' + \sin \beta'\gamma' + \sin \gamma'\alpha') \cos DD'.$$

*Déterminant  $\beta'_m$ .*

39. A cause de la relation  $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$ , on voit que

$$\beta'_m = \frac{\alpha'_m}{(-2)^{m-1}}.$$

On obtient donc les valeurs de  $\beta'_m$  en divisant celles de  $\alpha'_m$  par  $(-2)^{m-1}$ .

*Relations entre deux groupes de m plans.*

40. *Notations.* — Étant pris deux groupes de  $m$  plans  $ABC \dots M, A'B'C' \dots M'$ , posons

$$V'_m = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \dots & I_{AM'} & (o, A) \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \dots & I_{BM'} & (o, B) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{MA'} & I_{MB'} & \dots & I_{MM'} & (o, M) \\ (o, A') & (o, B') & \dots & (o, M') & o \end{vmatrix},$$

les indices étant pris par rapport à la surface  $S$ , dont le centre est au point  $o$ .

Deux plans  $R, S$  étant donnés, si  $P$  est le plan diamétral qui passe par leur intersection, nous désignerons par  $D_{RS}$  l'expression  $\frac{\sin^2 RS}{\sin PR \sin PS} I_P$ , et nous poserons

$$A_m = \begin{vmatrix} D_{AA'} & D_{AB'} & \dots & D_{AM'} \\ D_{AB'} & D_{BB'} & \dots & D_{BM'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{MA'} & D_{MB'} & \dots & D_{MM'} \end{vmatrix},$$

$$A'_m = \begin{vmatrix} D_{AA'} & D_{AB'} & \dots & D_{AM'} & (o, A) \\ D_{BA'} & D_{BB'} & \dots & D_{BM'} & (o, B) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{MA'} & D_{MB'} & \dots & D_{MM'} & (o, M) \\ (o, A') & (o, B') & \dots & (o, M') & o \end{vmatrix}.$$

Nous poserons encore

$$B_m = \begin{vmatrix} \frac{\cos^2 AA'}{2} & \frac{\cos^2 AB'}{2} & \dots & \frac{\cos^2 AM'}{2} \\ \frac{\cos^2 BA'}{2} & \frac{\cos^2 BB'}{2} & \dots & \frac{\cos^2 BM'}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\cos^2 MA'}{2} & \frac{\cos^2 MB'}{2} & \dots & \frac{\cos^2 MM'}{2} \end{vmatrix},$$

$$R'_m = \begin{vmatrix} \cos \frac{AA'}{2} & \cos \frac{AB'}{2} & \dots & \cos \frac{AM'}{2} & 1 \\ \cos \frac{BA'}{2} & \cos \frac{BB'}{2} & \dots & \cos \frac{BM'}{2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \frac{MA'}{2} & \cos \frac{MB'}{2} & \dots & \cos \frac{MM'}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Déterminant  $\nabla'_m$ .

41. Étant pris deux groupes de  $m$  plans  $AB\dots M$ ;  $A'B'\dots M'$  :

1° Le déterminant  $\nabla'_m = 0$  pour  $m$  plus grand que 4.

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$\nabla'_4 = \frac{1}{\pi^2} \frac{(3V)^3}{2ABCD} \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$\nabla'_3 = \frac{1}{\pi^2} \sin ABC \sin A'B'C' od.od' I_{\delta\delta'},$$

$d, d'$  étant les sommets des trièdres  $ABC, A'B'C'$ , et  $\delta, \delta'$  les diamètres  $od, od'$ .

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$\nabla'_2 = -\sin AB \sin A'B' (o, \nu)(o, \nu') I_{NN'},$$

$\nu, \nu'$  étant les intersections  $AB, A'B'$ ;  $N, N'$  les plans diamétraux qui passent par ces intersections.

Démonstration. — Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & \dots & M & P \\ A' & B' & \dots & M' & P' \end{vmatrix}$$

formé à l'aide des deux groupes de  $m + 1$  plans  $AB\dots P, A'B'\dots P'$ .

Si l'on suppose que les deux derniers P, P' coïncident avec le plan de l'infini, en remarquant que dans cette hypothèse (13)

$$\begin{aligned} \frac{I_{AP'}}{(o, A)(o, P')} &= \frac{I_{BP'}}{(o, B)(o, P')} \cdots \frac{I_{MP'}}{(o, M)(o, P')} \\ &= \frac{I_{PA'}}{(o, P')(o, A')} = \cdots = \frac{I_{PP'}}{(o, P)(o, P')} = \frac{1}{\pi^2}, \end{aligned}$$

on trouvera la relation

$$\frac{\pi^4}{(o, P)(o, P')} \begin{vmatrix} A & B & \dots & M & P \\ A' & B' & \dots & M' & P' \end{vmatrix} = \pi^2 \begin{vmatrix} A & B & \dots & M \\ A' & B' & \dots & M' \end{vmatrix} + \nabla'_m.$$

Les 1° et 2° sont donc évidents d'après la valeur de  $\nabla_m(8)$ .

3° On a pour  $m = 3$

$$\nabla'_3 = \frac{\pi^4}{(o, P)(o, P')} \begin{vmatrix} A & B & C & P \\ A' & B' & C' & P' \end{vmatrix} - \pi^2 \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après la valeur de  $\nabla_3$ , en supposant P et P' à distance finie,

$$\begin{vmatrix} A & B & C & P \\ A' & B' & C' & P' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi^5} \sin ABC \sin A'B'C' \cdot d, P', d', P';$$

d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^4} \sin ABC \sin A'B'C' I_{dd'},$$

$d, d'$  étant les sommets des trièdres ABC, A'B'C'. Lors donc que les plans P, P' seront à l'infini, on aura

$$\begin{aligned} \pi^2 \nabla'_3 &= -\sin ABC \sin A'B'C' (1 + I_{dd'}) \\ &= \sin ABC \sin A'B'C' od.od' I_{\delta\delta'}, \end{aligned}$$

puisque (11)

$$1 + I_{dd'} = od.od' I_{\delta\delta'}.$$

4° On a, pour  $m = 2$ ,

$$\nabla'_2 = \frac{\pi^4}{(o, P)(o, P')} \begin{vmatrix} A & B & P \\ A' & B' & P' \end{vmatrix} - \pi^2 \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après la valeur de  $\nabla_2$ , les plans  $P, P'$  étant à distance finie

$$\begin{vmatrix} A & B & P \\ A' & B' & P' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^4} \sin AB \sin A' B' \sin(\nu, P) \sin(\nu', P') I_{dd'},$$

les points  $d, d'$  étant les sommets des trièdres  $ABP, A'B'P'$ . Prenons un point  $c$  sur l'intersection  $AB$ , un point  $c'$  sur l'intersection  $A'B'$ :

$$(c, P) = cd \sin(\nu, P), \quad (c', P') = c' d' \sin(\nu', P');$$

d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A' B' I_{\nu\nu'},$$

d'où résulte

$$\nabla'_2 = \sin AB \sin A' B' \left[ \frac{(c, P)(c', P')}{(o, P)(o, P')} \frac{I_{dd'}}{cd c'd'} + I_{\nu\nu'} \right].$$

Si maintenant les plans  $P, P'$  s'éloignent à l'infini en se rappelant la relation  $I_{dd'} = -1 - od.od' I_{\nu_0\nu'_0}$ , on aura

$$\nabla'_2 = \sin AB \sin A' B' (-I_{\nu_0\nu'_0} + I_{\nu\nu'});$$

or, d'après (12), on a

$$I_{\nu\nu'} - I_{\nu_0\nu'_0} = - (o, \nu) (o, \nu') I_{NN'}.$$

### Déterminant $A_m$ .

42. Si l'on considère deux groupes de  $m$  plans,  $AB \dots M; A'B' \dots M'$ , tangents à une surface du second degré  $S$ :

1° Le déterminant  $A_m$  est nul lorsque  $m$  est plus grand que 4.

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$A_4 = -\frac{16}{\pi^6} \frac{(3V)^3}{2ABCD} \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$A_3 = -\frac{8}{\pi^4} \sin ABC \sin A'B'C' I_{dd'}.$$

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$A_2 = -\frac{4}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{v'v}.$$

Ce théorème se déduit des valeurs de  $\nabla_m$ , en remarquant que, d'après la relation (20), on a  $2I_{AB} = -D_{AB}$  lorsque les plans A et B touchent la surface S. De là résulte

$$A_m = (-2)^m \nabla_m.$$

Déterminant  $A'_m$ .

43. Étant pris arbitrairement deux groupes de  $m$  plans  $AB \dots M$ ;  $A'B' \dots M'$  :

1° Lorsque  $m$  est plus grand que 4,  $A'_m = 0$ .

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$A'_4 = -\frac{8}{\pi^4} \frac{(3V)^3}{2ABCD} \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$A'_3 = \frac{4}{\pi^2} \sin ABC \sin A'B'C' \text{od. od}' I_{\delta\delta'}.$$

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$A'_2 = 2 \sin AB \sin A'B' (o, v) (o, v') I_{CC'}.$$

A l'aide de la relation générale (20)

$$\frac{2I_{AB}}{(o, A)(o, B)} = \frac{I_A}{(o, A)^2} + \frac{I_B}{(o, B)^2} - \frac{D_{AB}}{(o, A)(o, B)},$$

on établira la relation

$$A'_m = (-2)^{m-1} \nabla'_m,$$

de la même manière que nous avons démontré la relation

$$a'_m = (-2)^{m-1} \Delta'_m.$$

### Déterminant $B_m$

44. Lorsque la surface  $S$  est une sphère de rayon  $R$  et que de plus tous les plans touchent la sphère, on a

$$D_{AB} = -\frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} AB}{R^4},$$

de sorte que

$$B_m = \left(-\frac{R^4}{4}\right)^m A_m.$$

De là, si l'on désigne par  $AB \dots M$ ,  $A'B' \dots M'$  deux groupes de  $m$  plans tangents à une sphère de rayon  $R$  et de centre  $o$  :

1° Lorsque  $m$  est plus grand que 4,  $B_m = 0$ .

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$B_4 = -\frac{1}{16R^4} \frac{(3V^3)}{2ABCD} \frac{3V'^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$B_3 = \frac{1}{8} \sin ABC \sin A'B'C' \left( \frac{od \cdot od' \cos dod'}{R^2} - 1 \right),$$

$d, d'$  étant les sommets des trièdres  $ABC, A'B'C'$ .

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$B_2 = -\frac{1}{4} \sin AB \sin A'B' \left[ \frac{(o, \nu)(o, \nu') \cos NN'}{R^2} - \cos \nu \nu' \right],$$

$\nu, \nu'$  étant les intersections  $AB, A'B'$ ;  $NN'$  les plans diamétraux passant par ces droites.



*Déterminant B'\_m.*

45. La substitution précédente faite dans le déterminant  $A'_m$ , dans lequel les distances  $(o, A), (o, B) \dots (o, A'), (o, B' \dots)$  sont toutes égales à  $R$ , donne

$$B'_m = \left(-\frac{R^4}{4}\right)^{m-1} \frac{A'_m}{R^2}.$$

De là, si l'on désigne par  $AB \dots M, A'B' \dots M'$  deux groupes de  $m$  plans tangents à une sphère de rayon  $R$  et de centre  $o$  :

1° Lorsque  $m$  est plus grand que 4,  $B'_m = 0$ .

2° Lorsque  $m = 4$ ,

$$B'_4 = \frac{1}{8R^2} \frac{(3V)^3}{2ABCD} \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° Lorsque  $m = 3$ ,

$$B'_3 = -\frac{1}{4R^2} \sin ABC \sin A'B'C' \odot \odot \odot \cos \odot \odot \odot'.$$

4° Lorsque  $m = 2$ ,

$$B'_2 = \frac{1}{2R^2} \sin AB \sin A'B' (o, \nu) (o, \nu') \cos NN'.$$

(A suivre.)