NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 328-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__328_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 325

(voir 1re série, t. XV, p. 229);

PAR M. H. BROCARD.

Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; *tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a*

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q,$$

faisant $h = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)}$, $t + h$ *sera une valeur approchée de* x *comprise entre* t *et* $t+1$; *discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.*

D'après les conditions énoncées, $\varphi(x)$ représente une fonction entière algébrique, dont tous les termes sont positifs et renferment x en facteur. Cette fonction croît indéfiniment avec x, à partir de $x = 0$, valeur qui annule aussi $\varphi(x)$.

L'équation proposée $\varphi(x) = q$ résulte de l'élimination de y entre les deux équations $y = \varphi(x)$ et $y = q$. La première représente une courbe OMDN (*) partant de l'origine des coordonnées, et la seconde une droite ACDB parallèle à Ox, et déterminant sur Oy, à partir du point O, un segment égal à q.

Par hypothèse, l'abscisse du point d'intersection D de ces deux lignes est comprise entre les valeurs t et $t+1$ de x. Soient OA′, OB′, sur l'axe OX des abscisses, les segments correspondants; M, N les points correspondants de la courbe; A, B ceux de la droite. Menons la droite MN qui coupe AB au point C. La correction à faire à la racine $OA' = t$ est représentée par AC. Or la similitude des triangles ACM, NCB donne

$$AC = AB \frac{AM}{AM + BN};$$

et, en remplaçant AB, AM, BN, respectivement par 1, $q - \varphi(t)$ et $\varphi(t+1) - q$, il vient évidemment

$$AC = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Ainsi la valeur de h n'est autre que celle de AC, c'est-à-dire la correction donnée par la *méthode des parties proportionnelles*, enseignée dans tous les cours, et sur laquelle, pour ce motif, nous ne pensons pas devoir insister davantage.

Question 1075

(voir 2e serie, t XI, p. 190);

PAR M. H. BROCARD.

Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A *et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à* A.

(LIONNET).

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule

$$N = \frac{A}{LA - 1,08366},$$

qui indique le nombre N des nombres premiers non supérieurs à A (*). D'après cela, l'inégalité à établir est la suivante :

$$\frac{2A}{L2A - 1,08366} < 2\left(\frac{A}{LA - 1,08366}\right).$$

Les numérateurs sont égaux, mais le premier dénominateur est plus grand que le second : la proposition est donc démontrée.

Question 1201

(voir 2e série, t. XV, p. 190);

PAR M. MAURICE LALLEMENT,

Élève en Mathematiques elementaires au Lycee d'Amiens.

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans un cercle on mène des perpendiculaires aux côtés oppo-*

(*) *Théorie des nombres* de Legendre, 3e édition, 1830; t. II, p. 65 et suivantes.

sés. Elles rencontrent la circonférence en des points A′, B′, C′. *On prolonge les cordes* A′B′, A′C′, B′C′, *qui coupent respectivement les côtés* AB, AC, BC *du triangle donné en des point* c, b, a; *démontrer que les trois points* c, b, a *sont en ligne droite.* (H. Brocard.)

On sait que les trois droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point O; les trois points c, b, a doivent donc être en ligne droite, comme conséquence de cette propriété fondamentale des triangles homologiques :

Si deux triangles ABC, A′B′C′ *sont tels que les sommets correspondants* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′ *soient sur trois droites concourantes en un même point, les côtés opposés à ces sommets,* BC *et* B′C′, AC *et* A′C′, AB *et* A′B′, *se coupent en trois points* a, b, c *qui sont en ligne droite.*

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; B. Launoy; C. Chadu; Moret-Blanc; Sondat; Bourguet; Wisselink; Tournois; Paul Barbarin ; E. Belloc et Berthomieu, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux; Leloutre et Portail, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Barthe et Clautrier, au lycée de Poitiers; Joseph Narino, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille; Biette, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; Charles Richard; Thevenin, du lycée Charlemagne.

MM. Bourguet, Gambey, Chadu, Wisselink et Barbarin ont généralisé la proposition énoncée, en remplaçant les trois hauteurs du triangle par trois droites quelconques issues de ses sommets et concourantes en un point; et la circonférence circonscrite au triangle par l'une quelconque des lignes du second degré.

Cette généralisation a été, de même, indiquée par MM. Belloc, Berthomieu, Charles Richard et Thevenin.

Question 1203

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 191);

Par M. H. JACOB,

à Dijon.

Soient A *un ombilic d'une surface du second degré* (S), *et* ρ *le second point d'intersection de la normale* *en ce point avec la surface. On joint un point quelconque m de la surface* (S) *aux points* ρ *et* A ; *par ce dernier point et perpendiculairement à la droite* A*m*, *on mène un plan qui coupe* ρm *en un point* μ.

Le point μ *décrit un plan parallèle aux sections circulaires de la surface* (S). (Genty.)

L'équation de (S), rapportée au plan tangent en A et à la normale, peut s'écrire, en désignant par ρ le z du point ρ,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + az(z-\rho) + 2byz + 2cxz = 0 \ (*).$$

Soient x', y', z' les coordonnées de m. L'équation d'un plan mené par m perpendiculaire à Am est

$$(2) \qquad xx' + yy' + zz' = 0.$$

Les équations de ρm sont

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z-\rho}{z'-\rho} = \frac{1}{\lambda};$$

d'où

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' - \rho = \lambda(z-\rho).$$

En substituant ces valeurs de x', y', z' dans l'équation (1), qui doit être vérifiée par x', y', z', et dans l'équation (2), on a les deux équations

$$\lambda(x^2+y^2) + z[\rho + \lambda(z-\rho)] = 0,$$

$$\lambda(x^2+y^2) + a[\rho + \lambda(z-\rho)](z-\rho) + 2(by+cx)[\rho+\lambda(z-\rho)] = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer λ.

(*) Elle s'écrirait plus simplement

$$x^2 + y^2 + az(z-\rho) + 2cxz = 0,$$

en prenant pour plan des xz le plan principal de (S), qui passe par la normale, à l'ombilic. (G.)

En remplaçant dans la seconde $\rho + \lambda(z-\rho)$ par sa valeur, tirée de la première, $\lambda(x^2+y^2)$ disparaît, et il reste

$$z - a(z-\rho) - 2(by + cx) = 0,$$

équation qui représente un plan. D'autre part, l'équation de (S) peut s'écrire

$$(x^2+y^2+z^2) + z[a(z-\rho) + 2by + 2cx - z] = 0;$$

il s'ensuit que le lieu de μ est un plan parallèle à un plan cyclique.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Chadu; Bourguet; Chabanel; E. G., ancien élève du lycée de Reims; Belloc et Berthomieu, élèves au lycée de Bordeaux; Thevenin, élève au lycée Charlemagne.

Question 1204

(voir p. 191);

PAR M. BOURGUET.

« *Si une surface du second ordre a pour équation*

$$\begin{aligned}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z - 1 = 0,\end{aligned}$$

et si cette équation représente deux plans, les coefficients sont liés par les trois relations

$$(1)\qquad M\frac{B'B''}{B} + N\frac{BB''}{B'} + P\frac{BB'}{B''} + 1 = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0,$$

$$(3)\qquad MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1 = 0.$$

» *Dans ces relations, on a posé*

$$\frac{1}{M} = A - \frac{B'B''}{B},\quad \frac{1}{N} = A' - \frac{BB''}{B'},\quad \frac{1}{P} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

(V. HIOUX.)

En adoptant la notation indiquée, on trouve pour le déterminant D les coordonnées du centre a, b, c; et pour le terme tout connu F_1

$$D = \frac{BB'B''}{MNP}\left(\frac{M}{B^2} + \frac{N}{B'^2} + \frac{P}{B''^2} + \frac{1}{BB'B''}\right),$$

$$a = -MC + \frac{B'B''}{NPD}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$b = -NC' + \frac{B''B}{PMD}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$c = -PC'' + \frac{BB'}{MND}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$F_1 = -[MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1]$$
$$+ \frac{BB'B''}{DMNP}\left[\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right]^2.$$

Les équations (1) et (2) expriment que la surface a une infinité de centres, et l'équation (3) que ces centres font partie de la surface.

Il faut remarquer l'expression simple des coordonnées du centre dans le cas où $\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0$.

Note. — La même question a ete résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey.

Question 1205

(voir p 192),

PAR M. A. PELLISSIER.

Les segments des normales en deux points d'une conique, compris entre ces points et un axe de la courbe, sont vus sous le même angle du point de concours des tangentes en ces points. (JOSEPH BRUNO.)

Soient TM, TM' deux tangentes aux points M, M' et

MN, M′N′ les segments des normales compris entre les points de contact et un axe de la courbe; il faut démontrer que

$$\widehat{MTN} = \widehat{M'TN'}.$$

Abaissons la perpendiculaire TP sur l'axe, et menons les droites PM, PM′.

Les deux quadrilatères TPNM, TPN′M′ sont inscriptibles, et par conséquent on a

$$\widehat{MTN} = \widehat{MPN}, \quad \widehat{M'TN'} = \widehat{M'PN'}.$$

Or, la perpendiculaire TP étant la polaire du point A où la corde des contacts MM′ rencontre l'axe, le faisceau (P, AMTM′) est harmonique. Mais, puisque les deux rayons conjugués PA, PT sont rectangulaires, le rayon PT divise en deux parties égales l'angle des deux autres rayons PM, PM′; donc

$$\widehat{MPT} = \widehat{M'PT},$$

par suite

$$\widehat{MPN} = \widehat{M'PN'},$$

et enfin

$$\widehat{MTN} = \widehat{M'TN'}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Moret-Blanc; Sondat; Chadu et B. Launoy; Vladimir Habbé, maître de Mathématiques à l'École Alexandre, à Nicolajeff (Russie méridionale).