

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 282-287

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_282\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__282_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1197*

( voir p. 190 );

PAR M. EUG. BIARD,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

*On donne dans un même plan deux droites parallèles A, B, et un point C situé hors de l'espace limité par les deux parallèles; on mène par le point C une sécante rencontrant les droites A, B en a, b; et sur ab*

comme diamètre on décrit un cercle : démontrer que, si la sécante devient mobile, l'enveloppe de ce cercle est une hyperbole. (HARKEMA.)

Je prends pour axe des  $x$  une parallèle OX aux droites A, B et également distante de ces droites ; pour axe des  $y$  une perpendiculaire OY à A, B, passant par le point donné C, et rencontrant A, B en des points D, D'.

Soient  $2d$  la distance DD' des droites A, B ;  $c$  la distance CO du point C à la droite OX, et  $\alpha$  l'abscisse variable du point de rencontre O' de la droite mobile Cab avec l'axe OX.

Le point O' est le centre du cercle décrit sur  $ab$  comme diamètre, et, si  $r$  en est le rayon, l'équation du cercle sera

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2.$$

Exprimons que ce cercle passe par le point  $a$ . L'ordonnée de ce point est  $d$ , et son abscisse est égale à  $\alpha \left( \frac{c-d}{c} \right)$ , puisque  $\frac{Da}{OO'} = \frac{CD}{CO}$ . On a donc

$$\alpha^2 \left( \frac{c-d}{c} - 1 \right)^2 + d^2 = r^2, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2 d^2}{c^2} + d^2 = r^2,$$

et l'équation du cercle devient

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 d^2}{c^2} + d^2$$

ou, en ordonnant par rapport à  $\alpha$ ,

$$(1) \quad \alpha^2 \left( 1 - \frac{d^2}{c^2} \right) - 2\alpha x + x^2 + y^2 - d^2 = 0.$$

Pour trouver l'équation de l'enveloppe du cercle, il faut exprimer que l'équation (1) en  $\alpha$  admet une racine double. On a ainsi

$$x^2 - (x^2 + y^2 - d^2) \left( 1 - \frac{d^2}{c^2} \right) = 0,$$

d'où

$$(2) \quad \frac{x^2}{c^2 - d^2} - \frac{y^2}{d^2} + 1 = 0,$$

équation d'une hyperbole rapportée à son centre et à ses axes, dont les deux sommets sont les points D, D', où les droites A, B sont rencontrées par la perpendiculaire abaissée du point C sur leurs directions, et dont les foyers sont l'un en C et l'autre au point symétrique de C par rapport à OX.

De là on déduit immédiatement le corollaire :

*Si par le foyer F d'une hyperbole on mène une droite coupant les tangentes aux sommets en des points t et t<sub>1</sub>, le cercle décrit sur tt<sub>1</sub> comme diamètre est tangent aux deux branches de l'hyperbole.*

*Note.* — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier; Lez; Sondat; E. Kruschwitz; Moret-Blanc; Gambey; Wisselink; C. Trautmann, étudiant à Strasbourg; Édouard Guillet, maître répétiteur au Lycée de Moulins; Georges Piarron de Mondésir, élève en Mathématiques spéciales au Collège Stanislas; Ch. Degouy, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens (classe de M. Poujade); Leloutre et L. Portail, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Belloc et Berthomieu, du lycée de Bordeaux; Louis Goulin, du lycée Corneille à Rouen (classe de M. Vincent); Barthe et Clautrier, du lycée de Poitiers; J. Lopez, à Cadix.

### Question 1198

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 19<sup>o</sup> );

PAR M. LOUIS GOULIN,

Élève en Mathématiques spéciales, au lycée Corneille, à Rouen  
(classe de M. Vincent).

*On donne un cercle et un point fixe dans le plan du cercle; des différents points de la circonférence, pris pour centres, on décrit des cercles passant par le point fixe : trouver l'enveloppe des cordes d'intersection*

(réelles ou imaginaires) du cercle donné et des cercles décrits. (HARKEMA.)

Je prends pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle donné, l'axe des  $x$  passant par le point fixe P, dont je désigne l'abscisse par  $a$ . L'équation du cercle est

$$(1) \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Soient  $\alpha, \beta$  les coordonnées d'un point quelconque de ce cercle, on aura

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Le cercle dont le centre est le point  $(\alpha, \beta)$  et qui passe en P a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (a - \alpha)^2 + \beta^2$$

ou

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2a\alpha - a^2 = 0.$$

La corde commune aux cercles (1) et (3) a pour équation

$$(4) \quad 2\alpha x + 2\beta y - 2a\alpha + a^2 - R^2 = 0.$$

Je prends la dérivée de cette dernière équation, par rapport à  $\alpha$ , en y considérant  $\beta$  comme une fonction de  $\alpha$ , définie par l'équation (2). J'obtiens ainsi l'équation

$$x - a - \frac{\alpha}{\beta} y = 0$$

ou

$$(5) \quad (x - a)\beta - \alpha y = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer  $\alpha$  et  $\beta$  entre les équations (2), (4), (5). Les deux

dernières donnent

$$\alpha = \frac{(R^2 - a^2)(x - a)}{2[(x - a)^2 + y^2]}, \quad \epsilon = \frac{(R^2 - a^2)y}{2[(x - a)^2 + y^2]}.$$

En remplaçant  $\alpha$ ,  $\epsilon$  par ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(R^2 - a^2)^2[(x - a)^2 + y^2] = 4R^2[(x - a)^2 + y^2]^2;$$

d'où, en supprimant la solution  $(x - a)^2 + y^2 = 0$ , qui représente le point P,

$$(6) \quad (x - a)^2 + y^2 = \frac{(a^2 - R^2)^2}{4R^2},$$

équation d'une circonférence ayant pour centre le point donné P et pour rayon  $\pm \frac{a^2 - R^2}{2R}$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Lez; Bourguet; Gambey; Moret-Blanc; Ch. Chadu; Sondat; Wisselink; Tournois; Édouard Guillet, maître répétiteur au lycée de Moulins; Ch. Couy, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens (classe de M. Poujade); Leloutre, Portail, E. Biard, élèves au lycée de Lille; Clautrier, du lycée de Poitiers (classe de M. Longchamps).

Des solutions géométriques ont été données par MM. Bourguet, Tournois, Chadu et Clautrier.

### Question 1202

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 191);

PAR MM. PAUL ET MARÉCHAL,

Élèves en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux.

*La somme des puissances d'un point quelconque, par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale à quatre fois la puissance du même point par rapport à la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les milieux des diagonales.* (LAISANT.)

Soient  $a, b, c, d$  les côtés du quadrilatère;  $e, f$  ses diagonales;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les distances d'un point quelconque  $M$  du plan aux milieux  $O, O', O'', O'''$  des côtés  $a, b, c, d$ . En désignant par  $P^2$  la somme des puissances du point  $M$  par rapport aux cercles décrits sur les quatre côtés du quadrilatère, comme diamètres, on a d'abord

$$(1) \quad P^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Si l'on représente par  $2h$  la longueur de la droite  $EF$  qui unit les milieux des diagonales du quadrilatère, une proposition connue donne

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 16h^2.$$

De plus, en remarquant que le quadrilatère  $OO'O''O'''$  est un parallélogramme dont les diagonales  $OO'', O'O'''$  se coupent au milieu  $H$  de la droite  $EF$ , on aura, en désignant par  $g$  la distance  $MH$ ,

$$(3) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4g^2 + \frac{1}{4}(e^2 + f^2),$$

d'où

$$P^2 = 4g^2 - 4h^2 = 4(g^2 - h^2).$$

Cette dernière égalité démontre la proposition énoncée.

*Note* — La même question a été résolue par MM Paul Terrier, A Pellissier, Tournois, Wisselink, Gambey, Moret-Blanc, Bourguet, Lez, Chadu, Launoy, Sondat, Kruschwitz, Charles Richard, Joseph Narino, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille, Biette, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre, Barthe et Clautrier, du lycée de Poitiers

M Terrier a démontré cette proposition plus générale

*La somme des puissances d'un point quelconque par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés et sur les deux diagonales d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale au double de la somme des puissances du même point, par rapport aux circonférences décrites sur les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales*