Question de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation (année 1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 263-269
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__263_1>

QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1875);

SOLUTION D'UN ANONYME.

Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la somme m^2 des carrés de la hauteur h, qui correspond au côté a, et de la différence des deux autres côtés, $h^2 + (b - c)^2 = m^2$.

Des propositions bien connues donnent

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$
$$= (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

et

$$bc = \frac{ah}{\sin A} = \frac{ah}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Il s'ensuit

$$a^2 = (b-c)^2 + 2ah\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} = (b+c)^2 - 2ah\cot\frac{A}{2};$$

d'où

$$(1)\qquad (b-c)^2 = a^2 - 2ah\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} = a\left(a - 2h\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}\right),$$

$$(2)\qquad (b+c)^2 = a^2 + 2ah\cot\frac{A}{2}.$$

En remplaçant $(b-c)^2$ par $a^2 - 2ah\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}$, l'égalité supposée $h^2 + (b-c)^2 = m^2$ devient

$$(3)\qquad h^2 - 2ah\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} + a^2 - m^2 = 0.$$

Pour que le triangle à résoudre existe, il faut et il suffit que les valeurs de $(b-c)$ et de $(b+c)$ déduites des équations (1), (2), (3) soient réelles et qu'en outre on ait $b - c < a$, et $b + c > a$. Ce qui exige, d'après les équations (1) et (2), que la valeur de h soit réelle, positive, moindre que $\frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}$, ou, au plus égale à $\frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}$.

A toute racine de l'équation (3) satisfaisant à ces conditions correspond nécessairement une solution réelle de la question proposée. Lorsque $h = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}$, on a $(b-c)^2 = 0$, $b = c$; le triangle considéré est isoscèle. Cela posé et admis, nous distinguerons, dans la discussion du problème, ces trois cas : $a^2 - m^2 < 0$, $= 0$, > 0.

1° Soit $a^2 - m^2 < 0$. Les racines de l'équation (3) sont réelles et de signes contraires, et comme, en remplaçant h par 0, le premier membre de cette équation se réduit à la quantité négative $a^2 - m^2$, il faut, pour que la racine positive satisfasse à la condition $h \leqq \dfrac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}$, que le résultat de la substitution de $\dfrac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}$ à h soit positif, ou égal à zéro, ce qui donne

$$\left(\frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 \geqq 0,$$

d'où

$$\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2m}.$$

Ainsi, dans l'hypothèse $a^2 - m^2 < 0$, la question n'admet aucune solution lorsqu'on a $\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} > \frac{a}{2m}$; et elle en admet une, et une seule pour $\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2m}$. Quand $\mathrm{tang}\,\frac{A}{2} = \frac{a}{2m}$, on a

$$\left(\frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 = 0,\quad h = \frac{a}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{A}{2}},\quad (b-c)^2 = 0,\ b = c,$$

le triangle est isoscèle.

2° $a^2 - m^2 = 0$. Les racines de l'équation (3) sont o et $2a \tang \frac{A}{2}$. La condition relative à la racine positive $2a \tang \frac{A}{2}$ devient

$$2a \tang \frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}, \quad \text{ou} \quad \tang \frac{A}{2} \leqq \frac{1}{2}.$$

Donc, lorsqu'on a $a^2 - m^2 = 0$, il faut et il suffit, pour que la question proposée admette une solution, qu'on ait $\tang \frac{A}{2} \leqq \frac{1}{2}$. Si $\tang \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, la racine positive $2a \tang \frac{A}{2} = \frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}$, et le triangle considéré est isoscèle.

3° $a^2 - m^2 > 0$. La condition de réalité des racines h', h'' de l'équation (3), est $a^2 \tang^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) \geqq 0$. Quand cette condition est remplie, les racines h', h'' sont positives, inégales ou égales suivant qu'on a

$a^2 \tang^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > 0$, ou $a^2 \tang^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) = 0$.

Admettons d'abord l'inégalité

$$a^2 \tang^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > 0,$$

soit $h' < h''$.

Le résultat $\left(\frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}\right)^2 - m^2$ de la substitution de $\frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}$ à h dans le premier membre de l'équation (3) peut être négatif, nul, ou positif; ce sont trois cas distincts que nous allons successivement considérer.

Soit $\left(\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 < 0$ (*). L'une des racines, h', est comprise entre o et $\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$, l'autre racine h'' est plus grande que $\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$. La première donne une solution de la question proposée, la seconde est inadmissible.

Si $\left(\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 = 0$. L'équation (3) a une racine égale à $\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$; correspondant à un triangle isoscèle. La seconde racine est égale à $2a\tang\frac{A}{2} - \dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$; pour qu'elle soit moindre que $\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$, il faut qu'on ait $\tang\frac{A}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}}$. Quand cette inégalité a lieu, la question admet deux solutions. Elle n'admet qu'une seule solution si $\tang\frac{A}{2}$ surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}}$. L'égalité $\tang\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ est impossible, parce que les deux racines h', h'' sont supposées inégales.

(*) Pour que les inégalités $\left(\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 < 0$, $a^2 - m^2 > 0$ existent simultanément, il faut que l'on ait $\dfrac{a}{2\tang\frac{A}{2}} < a$; $\tang\frac{A}{2} > \frac{1}{2}$.

Soit $\left(\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 > 0$. En substituant $a \tan\frac{A}{2}$ à l'inconnue h, le premier membre de l'équation (3) devient $a^2 - m^2 - a^2 \tan^2\frac{A}{2}$ quantité négative, d'après l'hypothèse $a^2 \tan^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > 0$. Il en faut conclure que l'équation (3) a une racine comprise entre o et $a \tan\frac{A}{2}$, et que l'autre racine est comprise entre $a \tan\frac{A}{2}$ et $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$. Lorsqu'on a

$$a \tan\frac{A}{2} < \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$$

d'où

$$\tan\frac{A}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ces deux racines sont moindres que $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$, et la question a deux solutions. Si, au contraire, on a

$$a \tan\frac{A}{2} > \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}},$$

les deux racines sont, l'une et l'autre, plus grandes que $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$, et la question n'admet aucune solution. L'égalité $a \tan\frac{A}{2} = \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$ ne peut exister, puisque les substitutions de $a \operatorname{tang} \frac{A}{2}$ et de $\frac{a}{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}}$ à h donnent des résultats de signes contraires.

Actuellement, supposons que

$$a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) = 0,$$

d'où

$$h' = h'' = a \operatorname{tang} \frac{A}{2}.$$

Suivant qu'on aura

$$a \operatorname{tang} \frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}} \quad \text{ou} \quad a \operatorname{tang} \frac{A}{2} > \frac{a}{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}},$$

la question admettra une solution ou n'en admettra aucune. Si $a \operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{a}{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}}$, le triangle proposé est isoscèle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Chadu.