

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 251-263

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__251_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'artillerie.

PRÉLIMINAIRES.

Nous avons déjà exposé, dans les *Nouvelles Annales*, une théorie géométrique des indices. Dans ce nouveau travail, au lieu de considérer l'indice d'un point d'une droite ou d'un plan par rapport à une surface du second degré, nous étudions les propriétés de ce que nous appelons indice d'un système de deux points, de deux droites et de deux plans. Lorsque ces points, ces droites, ces plans coïncident, on retrouve les indices tels que nous les avons déjà considérés.

Les indices seront, en général, pris par rapport à la surface du second degré S . Nous indiquons les points par les lettres romaines minuscules, les plans par les lettres romaines majuscules, et les droites par les lettres grecques. Les indices étant désignés par l'initiale I , nous écrivons I_a , I_α , I_A pour indiquer l'indice du point a , de la droite α et du plan A ; de même $I_{aa'}$, $I_{\alpha\alpha'}$, $I_{AA'}$ indiqueront l'indice du système des points a , a' , des droites α , α' , et des plans A , A' .

Comme on le verra, toute la théorie des surfaces du second degré est comprise dans un seul théorème, celui que nous appelons *théorème général*; ceux qui suivent n'en sont que des corollaires.

Prenant pour point de départ une définition analy-

tique des indices, notre exposition sera elle-même plus analytique que géométrique.

Nous aurons souvent à considérer les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$. Les faces du premier seront A, B, C, D, et nous désignerons aussi par ces lettres les aires des faces opposées aux sommets de même nom. Les arêtes bc , ca , ab , qui forment la face D, seront représentées par les lettres α , β , γ , et les arêtes da , db , dc respectivement opposées aux premières par λ , μ , ν . Dans le tétraèdre $a'b'c'd'$, ces mêmes lettres affectées d'un accent désigneront les éléments correspondants.

Deux droites μ , μ' étant données, nous désignerons par la notation $|\mu, \mu'|$ le produit de la plus courte distance de la droite μ à la droite μ' par $\sin \mu\mu'$.

DÉFINITIONS.

Définition de l'indice du système de deux points a et a' .

1. *L'indice du système des deux points a et a' , par rapport à la surface S, est égal et de signe contraire au rapport des distances du plan polaire de l'un des points à l'autre et au centre de la surface.*

Le plan polaire du point a étant désigné par A' , celui du point a' par A , et o étant le centre de S, nous aurons

$$I_{aa'} = - \frac{(a, A)}{(o, A)} = - \frac{(a', A')}{(o, A')}.$$

Définition de l'indice du système de deux droites γ et γ' .

Sur la droite γ , prenons deux points arbitraires a, b ; sur la droite γ' , prenons deux points a', b' , également arbitraires; l'indice du système des droites γ et γ' est exprimé par la relation

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{ab \cdot a'b'} \left| \begin{array}{cc} I_{aa'} & I_{ab'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} \end{array} \right|.$$

Définition de l'indice du système de deux plans D et D'.

Sur le plan D, prenons trois points arbitraires a, b, c ; sur le plan D', prenons trois points, également arbitraires, a', b', c' ; l'indice du système des plans D et D' est exprimé par la relation

$$I_{DD'} = \frac{1}{4 abc \cdot a'b'c'} \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Deux points étant conjugués à la surface S lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre; deux droites étant conjuguées à la surface S lorsque la polaire de l'une rencontre l'autre; deux plans étant conjugués lorsque le pôle de l'un est situé dans l'autre, nos définitions montrent que l'indice du système de deux points ou de deux plans, conjugués à la surface S, est nul, et que l'indice du système de deux droites conjuguées à S est nul aussi.

Lorsque l'un des points a ou a' coïncide avec le centre o , l'indice $I_{aa'} = -1$.

2. THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Étant pris dans l'espace deux groupes de m points $abcd \dots m$, $a'b'c'd' \dots m'$, posons*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \dots & I_{a'm'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \dots & I_{b'n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{ma'} & I_{mb'} & \dots & I_{mn'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & m \\ a' & b' & c' & \dots & m' \end{vmatrix}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 4,

$$\Delta_m = 0;$$

2° Lorsque $m = 4$, si π est le produit des demi-axes

de la surface S,

$$\Delta_4 = - \frac{36abcd \cdot a'b'c'd'}{\pi^2};$$

3° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par D et D' les plans des triangles $abc, a'b'c'$,

$$\Delta_3 = 4abc \cdot a'b'c' I_{DD'};$$

4° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par γ et γ' les directions des segments $ab, a'b'$,

$$\Delta_2 = ab \cdot a'b' I_{\gamma\gamma'}.$$

Démonstration. — Si l'on représente par x_r, y_r, z_r les coordonnées du $r^{\text{ième}}$ point du premier groupe, par x'_s, y'_s, z'_s les coordonnées du $s^{\text{ième}}$ point du second groupe, l'indice du système de ces deux points, par rapport à la surface S, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

a pour expression

$$\frac{x_r x'_s}{\alpha^2} + \frac{y_r y'_s}{\beta^2} + \frac{z_r z'_s}{\gamma^2} - 1,$$

de sorte que, en ayant égard à la règle en usage pour multiplier les déterminants,

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\alpha} & \frac{y_1}{\beta} & \frac{z_1}{\gamma} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x_2}{\alpha} & \frac{y_2}{\beta} & \frac{z_2}{\gamma} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_n}{\alpha} & \frac{y_n}{\beta} & \frac{z_n}{\gamma} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x'_1}{\alpha} & \frac{y'_1}{\beta} & \frac{z'_1}{\gamma} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x'_2}{\alpha} & \frac{y'_2}{\beta} & \frac{z'_2}{\gamma} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x'_n}{\alpha} & \frac{y'_n}{\beta} & \frac{z'_n}{\gamma} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Or : 1° si m est plus grand que 4, chaque déterminant est nul;

2° Si $m = 4$, le premier déterminant a pour valeur $\pm \frac{6abcd}{\pi}$, le second a pour valeur $\mp \frac{6a'b'c'd'}{\pi}$; de là résulte la valeur de Δ_4 .

3° Dans le déterminant Δ_4 , prenons pour le point d' le pôle du plan D, qui passe par les trois points a, b, c ; ces points étant conjugués au point d' , on a

$$I_{ad'} = I_{bd'} = I_{cd'} = 0,$$

de sorte que

$$\Delta_4 = \Delta_3 I_{dd'}.$$

Or, si D' représente le plan $a'b'c'$,

$$3abcd = abc(d, D), \quad 3a'b'c'd' = a'b'c'(d', D').$$

Substituant ces valeurs dans Δ_4 , on obtient la relation

$$(1) \quad \frac{\Delta_3}{4abc \cdot a'b'c'} = - \frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2 I_{dd'}}.$$

Le second membre de cette relation étant indépendant des points a, b, c, a', b', c' , la valeur du premier l'est aussi, et ainsi se trouve justifiée notre définition de l'indice du système de deux plans.

4° Dans le déterminant Δ_3 , prenons le point c' sur la polaire de la droite ab ; on aura

$$I_{ac'} = I_{bc'} = 0,$$

de sorte que

$$\Delta_3 = \Delta_2 I_{cc'}.$$

Or, si γ et γ' représentent les droites $ab, a'b'$,

$$2abc = ab(c, \gamma), \quad 2a'b'c' = a'b'(c', \gamma').$$

Substituant ces valeurs dans Δ_3 , on obtient la relation

$$(2) \quad \frac{\Delta_2}{ab \cdot a'b'} = \frac{(c, \gamma)(c', \gamma')}{I_{cc'}} I_{DD'}.$$

Le second membre de cette relation étant indépendant

des points a, b, a', b' , la valeur du premier l'est aussi, et ainsi se trouve justifiée notre définition de l'indice du système de deux droites.

3. D'après la relation (1), on a, le point d' étant le pôle du plan D ,

$$I_{DD'} = - \frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2 I_{dd'}}$$

mais $I_{dd'} = - \frac{(d, D)}{(o, D)}$, de sorte que $I_{DD'} = \frac{(o, D)(d', D')}{\pi^2}$;

d'où l'on voit que l'indice du système de deux plans est égal à la distance du centre de la surface S à l'un des plans, multipliée par la distance du pôle de ce plan à l'autre plan, divisée par le carré du produit des demi-axes de la surface.

4. Lorsque l'un des plans, D' par exemple, passe par le centre o de la surface S , on déduit de la valeur précédente

$$I_{DD'} = - \frac{\delta_o'^2 \sin(\delta', D) \sin(\delta', D')}{\pi^2} = - \frac{\sin(\delta', D')}{D_o^2 \sin(\delta', D)},$$

δ_o' étant la longueur du demi-diamètre conjugué au plan D , δ' la direction de ce diamètre, D_o le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan D .

5. D'après la relation (2), on a aussi

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{(c, \gamma)(c', \gamma')}{I_{cc'}} I_{DD'}.$$

Dans cette expression, c est un point quelconque; c' est un point pris arbitrairement sur la polaire de la droite γ , D est le plan qui passe par le point c et la droite γ , D' est le plan qui passe par le point c' et la droite γ' . Prenons pour le point c le centre o de la surface S , et pour le point c' la trace de la polaire de la droite γ sur le plan diamétral qui passe par la droite γ' . Les plans D, D' étant

des plans diamétraux, si ν' est la polaire de la droite γ .
la relation (n° 4) donne

$$I_{DD'} = - \frac{\sin(\nu', D')}{D_0^2 \sin(\nu', D)},$$

D_0 désignant le produit des demi-axes de la section diamétrale D ; et, puisque $I_{c'c'} = -1$, nous avons

$$I_{\nu'\nu'} = (o, \gamma)(c', \gamma') \frac{\sin(\nu', D')}{D_0^2 \sin(\nu', D)}.$$

Soit ν'_o le demi-diamètre parallèle à la polaire ν' ,

$$\pi = D_0 \nu'_o \sin(\nu', D);$$

d'autre part, on voit que $(c', \gamma') \sin(\nu', D')$ est égal à la plus courte distance de la polaire ν' à la droite γ' , multipliée par le sinus de l'angle des droites ν', γ' . Si nous indiquons par la notation $|\nu', \gamma'|$ ce produit, on a donc

$$I_{\nu'\nu'} = \frac{(o, \gamma) |\nu', \gamma'| \nu'_o}{\pi D_0}.$$

L'indice du système de deux droites γ, γ' est égal à la distance du centre à l'une des droites γ , multipliée par la plus courte distance de la polaire ν' de la droite γ à la droite γ' , par le sinus de l'angle des droites ν', γ' et par le demi-diamètre parallèle à la polaire, divisée par le produit des demi-axes de la section diamétrale qui passe par γ , et par le produit des demi-axes de la surface.

6. Si la droite γ est un diamètre

$$I_{\nu'\nu'} = - \frac{\sin(\gamma', B')}{\gamma_0^2 \sin(\gamma, B')} = - \frac{B_0'^2 \sin(\gamma', B') \sin(\gamma, B')}{\pi^2},$$

B' indiquant la direction du plan conjugué au diamètre γ ; γ_0 la longueur du demi-diamètre déterminé

par γ ; et B'_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale conjuguée à γ .

En effet, si dans le déterminant Δ_2 on fait coïncider le point a avec le centre o ,

$$I_{aa'} = I_{ab'} = -1,$$

de sorte que

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{I_{ba'} - I_{bb'}}{ob \cdot a'b'}.$$

Mais, si B' est le plan polaire du point b ,

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{(b', B') - (a', B')}{(o, B') ob \cdot a'b'},$$

d'où l'on déduit la relation indiquée en remarquant que

$$\frac{(o, B') ob}{\sin(\gamma, B')} = \gamma^2, \quad (b', B') - (a', B') = b'a' \sin(\gamma', B').$$

7. On doit remarquer que cette valeur de $I_{\gamma\gamma'}$ ne change pas lorsque, le diamètre γ restant fixe, la seconde droite γ' se meut parallèlement à elle-même. De même la valeur (n° 4) de $I_{DD'}$, lorsque D' est un plan diamétral, ne change pas lorsque, D' restant fixe, le plan D se meut parallèlement à lui-même.

8. *Étant pris deux groupes de m plans $ABC\dots M$; $A'B'C'\dots M'$, posons*

$$\nabla_m = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \dots & I_{AM'} \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \dots & I_{BM'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{MA'} & I_{MB'} & \dots & I_{MM'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C & \dots & M \\ A' & B' & C' & \dots & M' \end{vmatrix}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 4, $\nabla_m = 0$.

2° Lorsque $m = 4$, si l'on désigne par A, B, C, D les aires des faces du tétraèdre formé par ces plans, et par V le volume de ce tétraèdre; par A', B', C', D' les aires

des faces du tétraèdre formé par ces plans, et par V' son volume,

$$\Delta_4 = -\frac{1}{\pi^6} \frac{(3V)^3}{2 ABCD} \frac{(3V')^3}{2 A'B'C'D'}.$$

3° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par $\sin ABC$, $\sin A'B'C'$ les sinus des angles formés par les normales extérieures aux faces des trièdres ABC , $A'B'C'$ et par d , d' les sommets de ces trièdres,

$$\nabla_3 = \frac{1}{\pi^4} \sin ABC \cdot \sin A'B'C' I_{dd'}.$$

4° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par ν , ν' les droites AB , $A'B'$,

$$\nabla_2 = -\frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\nu\nu'}.$$

Démonstration. — Lorsqu'on a deux plans M , N et les pôles m , n de ces plans par rapport à la surface S , nos définitions montrent que

$$I_{mn} = -\pi^2 \frac{I_{MN}}{(o, M)(o, N)}.$$

1° Pour démontrer le 1° du théorème, nous supposons que les points $a, b, \dots, m; a', b', \dots, m'$, qui figurent dans le déterminant Δ_m , sont les pôles des plans $A'B' \dots M'$; $AB \dots M$, qui figurent dans le déterminant ∇_m . Si l'on remplace dans Δ_m les indices des systèmes de points par leurs valeurs déduites de la relation précédente, on obtient le déterminant ∇_m multiplié par un certain facteur. Il en résulte $\nabla_m = 0$ pour m plus grand que 4.

Pour démontrer les autres parties du théorème, nous utiliserons cette propriété des déterminants : tout mineur de l'ordre p que l'on peut former avec les éléments du déterminant réciproque d'un déterminant est égal au

mineur complémentaire dans le déterminant primitif multiplié par la puissance $p - 1$ de ce déterminant.

Désignons par A, B, C, D les aires des faces du tétraèdre $abcd$, opposées aux sommets de même nom; par A', B', C', D' celles du tétraèdre $a'b'c'd'$. Le déterminant réciproque du déterminant Δ_4 a pour éléments

$$\begin{array}{cccc} 4 AA' I_{AA'} & 4 AB' I_{AB'} & \dots & 4 AD' I_{AD'}, \\ 4 BA' I_{BA'} & 4 BB' I_{BB'} & \dots & 4 BD' I_{BD'}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ 4 DA' I_{DA'} & 4 DB' I_{DB'} & \dots & 4 DD' I_{DD'}. \end{array}$$

2° Il résulte de là que le déterminant réciproque du déterminant Δ_4 a pour valeur $4^4 ABCD A'B'C'D' \nabla_4$; mais ce réciproque a aussi pour valeur le cube de Δ_4 ; égalant ces deux expressions, on en déduit

$$\nabla_4 = \frac{\Delta_4^3}{4^4 ABCD \cdot A' B' C' D'};$$

remplaçant Δ_4 par sa valeur (n° 2), on obtient la relation 2°.

3° Considérons le mineur du troisième ordre du déterminant réciproque que l'on obtient en supprimant dans ce déterminant les éléments où figurent les plans D et D' ; ce mineur a pour valeur $4^3 ABC A'B'C' \nabla_3$; il est donc aussi égal au mineur complémentaire $I_{dd'}$, dans le déterminant primitif Δ_4 , multiplié par le carré de ce déterminant : de là

$$4^3 ABC A' B' C' \nabla_3 = I_{dd'} \Delta_4^2;$$

remplaçant Δ_4 par sa valeur et remarquant que

$$\sin ABC = \frac{(3V)^2}{2 ABC}, \quad \sin A'B'C' = \frac{(3V')^2}{2 A' B' C'},$$

on obtient la relation 3°.

4° Considérons le mineur du deuxième ordre du dé-

terminant réciproque que l'on obtient en supprimant dans ce déterminant les éléments où figurent les plans C, D, C', D'; ce déterminant a pour valeur $4^2 \text{ABA}'\text{B}'\nabla_2$; il est donc égal au mineur complémentaire $\begin{vmatrix} \text{I}_{cc'} & \text{I}_{cd'} \\ \text{I}_{dc'} & \text{I}_{dd'} \end{vmatrix}$ dans le déterminant primitif Δ_4 multiplié par ce déterminant : de là

$$4^2 \text{ABA}'\text{B}'\nabla_2 = \begin{vmatrix} \text{I}_{cc'} & \text{I}_{cd'} \\ \text{I}_{dc'} & \text{I}_{dd'} \end{vmatrix} \Delta_4 = cd \cdot c'd' \text{I}_{\nu\nu'} \Delta_4,$$

en désignant par ν l'arête cd intersection des plans A, B et par ν' l'arête $c'd'$ intersection des plans A', B'. Remplaçant Δ_4 par sa valeur et remarquant que

$$2 \text{AB} \sin \text{AB} = 3 \text{V} cd, \quad 2 \text{A}'\text{B}' \sin \text{A}'\text{B}' = 3 \text{V}' c'd',$$

on obtient la relation 4°.

9. THÉORÈME. — *Étant pris dans l'espace deux groupes de m droites $\alpha\beta \dots \mu$; $\alpha'\beta' \dots \mu'$, les premières passant par le point p , les secondes par le point p' , nous poserons*

$$\delta_m = \begin{vmatrix} \text{I}_{\alpha\alpha'} & \text{I}_{\alpha\beta'} & \dots & \text{I}_{\alpha\mu'} \\ \text{I}_{\beta\alpha'} & \text{I}_{\beta\beta'} & \dots & \text{I}_{\beta\mu'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{I}_{\mu\alpha'} & \text{I}_{\mu\beta'} & \dots & \text{I}_{\mu\mu'} \end{vmatrix}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 3, $\delta_m = 0$.

2° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par $\sin \alpha\beta\gamma$, $\sin \alpha'\beta'\gamma'$ les sinus des angles solides formés par les directions $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$,

$$\delta_3 = - \frac{\sin \alpha\beta\gamma \cdot \sin \alpha'\beta'\gamma'}{\pi^2} \text{I}_p^2 \text{I}_{p'}^2.$$

3° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par D et D' les plans $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$,

$$\delta_2 = \sin \alpha\beta \cdot \sin \alpha'\beta' \text{I}_{pp'} \text{I}_{DD'}.$$

Démonstration. — Prenons sur les droites du premier faisceau les points a, b, \dots, m , et sur les droites du second faisceau les points a', b', \dots, m' ; à l'aide de ces deux groupes de m points et des points p et p' formons le déterminant Δ_{m+1} :

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \dots & I_{am'} & I_{ap'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \dots & I_{bm'} & I_{bp'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{pa'} & I_{pb'} & \dots & I_{pm'} & I_{pp'} \end{vmatrix}.$$

Multiplions par $I_{pp'}$ tous les termes des m premières lignes de ce déterminant, retranchons ensuite des 1, 2, ..., $m^{\text{ièmes}}$ lignes du nouveau déterminant les produits des éléments correspondants de la dernière successivement par $I_{ap'}$, $I_{bp'}$, ..., $I_{mp'}$. Les termes de la première ligne sont

$$\begin{aligned} I_{aa'} I_{pp'} - I_{pa'} I_{ap'} &= pa \cdot p' a' I_{aa'}, \\ I_{ab'} I_{pp'} - I_{pb'} I_{ap'} &= pb \cdot p' b' I_{aa'}, \\ \dots & \dots, \\ I_{am'} I_{pp'} - I_{pm'} I_{ap'} &= pa \cdot p' m' I_{aa'}, \\ I_{ap'} I_{pp'} - I_{pp'} I_{ap'} &= 0; \end{aligned}$$

ceux de la seconde sont

$$\begin{aligned} I_{ba'} I_{pp'} - I_{pa'} I_{bp'} &= pb \cdot p' a' I_{aa'}, \\ I_{bb'} I_{pp'} - I_{pb'} I_{bp'} &= pb \cdot p' b' I_{aa'}, \\ \dots & \dots, \\ I_{bm'} I_{pp'} - I_{pm'} I_{bp'} &= pb \cdot p' m' I_{aa'}, \\ I_{bp'} I_{pp'} - I_{pp'} I_{bp'} &= 0; \end{aligned}$$

et l'on a des résultats analogues pour les autres lignes.

Tous les termes de la dernière colonne étant nuls, sauf le terme $I_{pp'}$, nous avons

$$\Delta_{m+1} I_{pp'} = I_{pp'} \delta_n QQ',$$

en posant

$$Q = pa.pb \dots pm, \quad Q' = p'a'.p'b' \dots p'm' :$$

de là

$$\delta_m = \frac{\Delta_{m+1} I_{pp'}^{m-1}}{QQ'} .$$

1° Lorsque m est plus grand que 3, $\Delta_{m+1} = 0$: donc aussi $\delta_m = 0$.

$$2^\circ \text{ Lorsque } m = 3, \delta_3 = \frac{\Delta_4 I_{pp'}^2}{pa.pb.pc.p'a'.p'b'.p'c'} ; \text{ or}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= - \frac{36pabc.p'a'b'c'}{\pi^2} \\ &= - \frac{\sin \alpha\beta\gamma . \sin \alpha'\beta'\gamma' pa.pb.pc.p'a'.p'b'.p'c'}{\pi^2} ; \end{aligned}$$

de là résulte la relation 2°.

3° Lorsque $m = 2$,

$$\delta_2 = \frac{\Delta_3 I_{pp'}}{pa.pb.p'a'.p'b'} ;$$

or

$$\Delta_3 = 4pab.p'a'b' I_{DD'} = \sin \alpha\beta \sin \alpha'\beta' . pa.pb.p'a'.p'b' I_{DD'} ,$$

en désignant par D et D' les plans $pab, p'a'b'$ ou $\alpha\beta, \alpha'\beta'$.

De là résulte la relation 3°. (*A suivre.*)