NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 221-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__221_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 506

(voir 1re serie, t. XIX, p 4J);

PAR M. H. BROCARD.

Deux points parcourent chacun une droite, et dans le même plan. Soient e, v l'espace parcouru et la vitesse du premier point au bout du temps t; e_1, v_1 les *mêmes données pour le second point. Si l'on a la relation*

$$v(a_1 + b_1 e_1) = v_1(a + be),$$

où les a et les b sont des constantes, la droite qui réunit les points, au même instant, enveloppe une conique. En indiquer le genre et l'espèce.

Prenons pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle des deux droites. Celles-ci auront pour équations

$$y = mx, \quad y = -mx.$$

L'équation de la droite dont on cherche l'enveloppe est

$$e(y - mx) - e_1(y + mx) + 2see_1 = 0,$$

s désignant la quantité $\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

On en tire

$$e = \frac{e_1(y + mx)}{y - mx + 2se_1}$$

et, en prenant les dérivées,

$$v = \frac{v_1(y^2 - m^2x^2)}{(y - mx + 2se_1)^2}.$$

D'ailleurs, on donne la condition

$$\frac{v}{a + be} = \frac{v_1}{a_1 + b_1 e_1},$$

dans laquelle a et a_1 doivent être des longueurs, b et b_1 des constantes numériques.

Remplaçons dans cette équation e et v par leurs expressions en fonction de v_1 et de e_1 ; nous aurons, après suppression du facteur commun v_1,

$$\begin{aligned}&2se^2[2sa + b(y + mx)]\\ &\quad + e_1(y - mx)[4sa + (b - b_1)(y + mx)]\\ &\quad + (y - mx)[a(y - mx) - a_1(y + mx)] = 0.\end{aligned}$$

L'équation de l'enveloppe de la droite sera donc, après avoir supprimé le facteur commun $y - mx$,

$$(y - mx)[4sa + (b - b_1)(y + mx)]^2$$
$$-8s[2sa + b(y + mx)][a(y - mx) - a_1(y + mx)] = 0.$$

De nouvelles réductions font également disparaître le facteur $y + mx$, et il reste définitivement l'équation

$$(b - b_1)^2(y^2 - m^2x^2) + 8s(a_1 b - b_1 a)y$$
$$+ 8sm(a_1 b + b_1 a)x + 16aa_1 s^2 = 0,$$

qui représente toujours une hyerbole dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites données.

Son centre a pour coordonnées

$$x = \frac{4s(a_1 b + b_1 a)}{m(b - b_1)^2}, \quad y = \frac{4s(ab_1 - ba_1)}{(b - b_1)^2}.$$

Question 1130

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. BOURGUET.

Étant données une courbe plane quelconque et une surface du second degré, trouver les surfaces développables qui, passant par la courbe, ont leur arête de rebroussement sur la surface : l'équation différentielle du premier ordre, à laquelle se ramène la solution de ce problème, peut toujours s'intégrer par de simples quadratures. (E. LAGUERRE.)

1° Supposons que la surface soit un cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

les équations de la génératrice seront

$$y = mx + \sqrt{m^2a^2 + b^2}, \quad z = px + q,$$

et la condition que deux génératrices consécutives se coupent donne

$$\frac{dq}{dp} = \frac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}},$$

et pour qu'elle coupe la courbe $\varphi(x,y)=0$, il faut que

$$\varphi\left(-\frac{q}{p},\ -m\frac{q}{p}+\sqrt{m^2a^2+b^2}\right)=0;$$

on tire de là

$$m=\psi\left(\frac{q}{p}\right),$$

et dès lors

$$\frac{dq}{dp}=\mathrm{F}\left(\frac{q}{p}\right),$$

équation homogène, d'où l'on tire

$$f(p,q)=0.$$

2° Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-h)^2}{c^2}-1=0$$

l'équation de la surface;

$$x=mz+\mathrm{X},\quad y=nz+\mathrm{Y}$$

celles de la génératrice. La condition que deux génératrices consécutives se coupent donne

$$-\frac{1}{\mathrm{Z}}=\frac{dm}{d\mathrm{X}}=\frac{dn}{d\mathrm{Y}},$$

et la condition que le point d'intersection soit sur la surface donne

$$\frac{dm^2}{d\mathrm{X}^2}\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)$$
$$-2\frac{dm}{d\mathrm{X}}\left(\frac{m\mathrm{X}}{a^2}+\frac{n\mathrm{Y}}{b^2}-\frac{h}{c^2}\right)+\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

et en différentiant

$$\frac{d^2m}{dX^2}\left[\frac{dm}{dX}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{mX}{a^2}+\frac{nY}{b^2}-\frac{h}{c^2}\right)\right]=0.$$

Le facteur $\frac{d^2m}{dX^2}=0$ donne un cône, qui a son sommet sur la surface, et pour directrice la courbe. C'est le second facteur qui donne la solution. Différentions, pour éliminer n, il vient

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)\\&\quad+\frac{dm}{dX}\left[\frac{X}{a^2}\left(1-\frac{XY'}{Y}\right)-\frac{Y'}{Y}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\right]\\&\qquad-\frac{m}{a^2}\frac{Y-XY'}{Y}+\frac{h}{c^2}\frac{Y'}{Y}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons, $\frac{h}{c}$ conservant une valeur finie plus petite que 1, que $\frac{1}{c}$ tende vers zéro; la surface deviendra un cylindre, et l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)\\&\quad+\frac{dm}{dX}\left[\frac{X}{a^2}\left(1-\frac{X}{Y}Y'\right)-\frac{Y'}{Y}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\right]\\&\qquad-\frac{m}{a^2}\left(1-X\frac{Y'}{Y}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

mais on connaît une intégrale particulière de cette équation

$$f\left(\frac{1}{m},-\frac{X}{m}\right)=0,$$

par suite, l'intégrale générale de l'équation (1) se trouve ramenée à des quadratures.

Ainsi les équations linéaires (1) et (2) s'intègrent complétement, quelle que soit la relation qui lie X et Y.

Dans le cas particulier où $h = c$, l'équation (2) devient

$$\frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)+\frac{Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\left(X\frac{dm}{dX}-m\right)=0,$$

$$(3)\quad \frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)+\frac{X^2 Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\frac{d}{dX}\left(\frac{m}{X}\right)=0,$$

et l'équation (1)

$$(4)\quad \frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)+\frac{X^2 Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\frac{d}{dX}\left(\frac{m}{X}\right)+\frac{Y}{c}\left(\frac{1}{Y}\right)'=0.$$

L'intégrale particulière de (3) est $m = cX$.

Question 1156

(voir 2e série, t. XIV, p. 95);

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.

On a une masse quelconque, attirant suivant la loi de la gravitation. Soit dv un élément infiniment petit de volume pris n'importe où dans l'espace. Si on le suppose rempli d'une matière homogène ayant pour densité 1, *il supportera une attraction* R *de la part de la masse attirante. Soit r la distance de cet élément dv à un point fixe* M, *et φ l'angle que la direction de* R *fait avec la direction qui joint l'élément dv au point* M. *Si l'on fait la somme de toutes les expressions* $\frac{R\cos\varphi}{r^2}$ *qui se rapportent à tous les éléments dv de l'espace, le résultat sera égal au produit du potentiel de la masse attirante relativement au point* M, *par* $4\pi f$, *π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et f la force d'attraction de deux points matériels de masse* 1, *situés à l'unité de distance.* (F. DIDON.)

Supposons, pour un instant, la masse attirante μ concentrée en un point situé à une distance a du point M et à une distance ρ de l'élément de volume dv; dans ce cas on a

$$R = \frac{f\mu\, dv}{\rho^2}.$$

Si l'on prend le point fixe M pour origine d'un système de coordonnées polaires (r, θ, ψ), l'expression bien connue de l'élément de volume dv est

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi\,;$$

par suite on a

$$(1) \qquad \frac{R\cos\varphi}{r^2} = f\mu\, \frac{\sin\theta\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\psi}{\rho^2}.$$

Dans le triangle ayant pour sommets le point M, l'élément dv, et le point de masse μ, et dont les côtés sont r, ρ, a, on a

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\cos\psi,$$

et de plus

$$dr\cos\varphi = d\rho = d\left(\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}\,\right),$$

et par suite

$$\frac{dr\cos\varphi}{\rho^2} = -d\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}}\right);$$

en sorte que la relation (1) devient

$$\frac{R\cos\varphi}{r^2} = -f\mu\, d\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\psi\,;$$

d'où

$$\sum \frac{R\cos\varphi}{r^2} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -f\mu\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

$$= 4\pi f\frac{\mu}{a}.$$

Or $\frac{\mu}{a}$ est le *potentiel* de la masse μ relatif au point M, et le théorème est démontré pour le cas spécial dans lequel je me suis placé.

Supposons maintenant la masse attirante quelconque et soit dm un élément quelconque de cette masse; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\sum \frac{\mathrm{R}\cos\varphi}{r^2} = 4\pi f \frac{dm}{a},$$

en ne considérant que le seul élément dm; si on fait la somme des actions analogues pour tous les éléments de la masse attirante, on aura enfin

$$\sum \frac{\mathrm{R}\cos\varphi}{r^2} = 4\pi f \sum \frac{dm}{a}.$$

Or $\sum \frac{dm}{a}$ est le potentiel de la masse attirante relativement au point M, dans la loi naturelle de l'attraction; le résultat est donc bien celui que l'on demandait.

Note. — La même question a été résolue par M. Bourguet.

Question 1182

(voir 2e série, t. XIV, p. 384)

PAR M. PRAVAZ.

Soient A *et* B *deux points d'un ovale de Descartes dont les foyers sont* F *et* F'.

AF *coupe en* K *le cercle décrit de* F *comme centre avec* FB *pour rayon;* AF' *coupe en* H *le cercle décrit de* F' *comme centre avec* F'B *pour rayon. Joignons* FH *et* F'K, *ces droites se coupent en* I.

Démontrer que la droite AI *passe par un point fixe, lorsque* A *se meut sur l'ovale.* (E. LEMOINE.)

Désignons par ρ et ρ' les coordonnées bipolaires de A; par ρ_1 et ρ'_1 celles de B; par $2c$ la distance FF'; soit L le point où KH rencontre FF'; on a, d'après une proposition connue de la théorie des transversales,

$$AK.F'H.LF = FK.AH.F'L,$$

ou

$$(\rho_1 - \rho)\rho'_1(2c - F'L) = \rho_1(\rho' - \rho'_1)F'L,$$

d'où l'on tire

$$F'L = \frac{2c(\rho_1 - \rho)\rho'_1}{\rho_1\rho' - \rho\rho'_1}. \tag{1}$$

On a, entre les coordonnées ρ, des équations de la forme

$$\rho = m\rho' + n,$$
$$\rho_1 = m\rho'_1 + n;$$

d'où

$$\rho_1\rho' - \rho\rho'_1 = n(\rho' - \rho'_1)$$

et

$$\rho - \rho_1 = m(\rho' - \rho'_1).$$

D'après cela, l'égalité (1) devient

$$F'L = \frac{2cm\rho'_1}{n}.$$

Le point L est donc fixe quand A se meut sur l'ovale; il en est de même du point de rencontre de AI avec FF', car ce dernier point est, comme l'on sait, le conjugué harmonique de L, par rapport à F et F'.

Note. — La même question a été résolue par M. de Cuerne, à Liége.

Question 1188

(voir 2e série, t. XV, p. 96);

PAR M. A. TOURNOIS,
à Saint-Omer.

Si deux mobiles se meuvent dans un plan sur deux courbes quelconques, mais avec des vitesses respective-

ment égales à chaque instant, la droite qui les joint touche continuellement son enveloppe au point symétrique par rapport à son milieu, de celui où elle est rencontrée par la bissectrice de l'angle des deux tangentes.

Ce théorème s'applique en particulier à l'enveloppe des cordes qui sous-tendent dans une courbe quelconque des arcs de longueur constante.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient AT, BT les tangentes aux points A, B (*), où se trouvent les mobiles au temps t. Pendant le temps Δt infiniment petit qui suit, ils décrivent deux éléments égaux AA', BB' de ces tangentes; la droite A'B' coupe AB en un point D dont la position limite est le point où AB touche son enveloppe. Si C est le point où la bissectrice de l'angle des tangentes coupe AB, il suffit évidemment de prouver que

$$\lim \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{AC} \quad \text{ou} \quad \lim \frac{AD}{BD} = \frac{BT}{AT} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Les triangles AA'D, BB'D donnent

$$\frac{AD}{AA'} = \frac{\sin A'}{\sin D}, \quad \frac{BD}{BB'} = \frac{\sin B'}{\sin D}.$$

Divisant, membre à membre, on a

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin A'}{\sin B'}.$$

Il suffit donc de prouver que $\lim \dfrac{\sin A'}{\sin B'} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$, ce qui est évident quand A'B' vient se confondre avec AB.

Remarque. — Si l'on considère l'enveloppe d'une corde sous-tendant dans une courbe des arcs égaux, les deux extrémités de la droite décrivent évidemment des arcs

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

égaux dans des temps égaux, et par suite le théorème précédent est applicable.

Note. — La même question à été résolue par MM. Trautmann, étudiant à Strasbourg; Barthe et Clautrier, élèves en mathématiques spéciales au Lycée de Poitiers; Pravaz, professeur au Collége de Tulle; Moret-Blanc; R.-W. Genese; P. Souverain, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Moulins.

Question 1189

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 96);

PAR M. MORET-BLANC.

La droite qui se meut de manière à rencontrer à chaque instant deux courbes quelconques sous deux angles respectivement égaux touche continuellement son enveloppe au point où elle est coupée par la droite qui joint les deux centres de coubure.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient AB, A′B′ deux positions infiniment voisines de la droite mobile, A et A′ étant les intersections avec la première courbe, B et B′ les intersections avec la seconde.

Les arcs infiniment petits AA′ et BB′ se confondent avec ceux des cercles osculateurs en A et B, et ont les mêmes tangentes à leurs extrémités. Les droites AB, A′B′ coupent donc les deux cercles osculateurs sous deux angles respectivement égaux, et, par suite, vont concourir à l'un des centres de similitude de ces deux cercles, point qui est situé sur la ligne de leurs centres, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Une corde qui se meut de manière à couper une courbe sous deux angles égaux touche son enveloppe en un point situé sur la droite qui joint les centres de courbure de ses deux extrémités.

Note. — La même question a eté résolue par MM. Lucien Levy; R.-W.

Genese; Pravaz; A. Tournois; H.-W. Wisselink; Barthe et Clautrier, du Lycée de Poitiers; Souverain, du Lycée de Moulins; Ch. Picard, élève du Lycée de Grenoble (classe de M. Bernard).

Question 1191

(voir p. 144);

PAR MADEMOISELLE LUCIE LEBOEUF,
à Commentry.

Les foyers de toutes les ellipses qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence.

(W.-H. BESANT.)

Je prends pour axe des y l'axe commun aux ellipses considérées (*) et pour axe des x la tangente au sommet fixe commun.

a, b, c étant les demi-axes et la demi-distance focale, variables de toutes ces ellipses, x et y les coordonnées de l'un quelconque des foyers, on a les relations

$$\frac{c^2}{b} + b = k,$$

k étant une constante,

$$y = b,$$
$$x^2 = c^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement, pour équation du lieu, le cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - ky = 0.$$

On voit de même, aussi facilement, que le lieu des

(*) Le point d'une ellipse où le cercle osculateur est maximum se trouve à l'une des deux extrémités du petit axe de la courbe. Il en résulte que toutes les ellipses qui ont en un point donné fixe le même cercle osculateur maximum ont aussi un axe de symétrie commun coïncidant avec le rayon mené du point fixe au centre de ce cercle.

foyers des ellipses ayant un sommet de petit axe commun, et telles que la distance de leur centre au centre de leur cercle osculateur maximum correspondant soit constante, est une parabole.

On a, en effet, les relations

$$\frac{c^2}{b} = k,$$

$$y = b,$$

$$x^2 = c^2;$$

d'où résulte, par l'élimination de b et c, l'équation de la parabole

$$x^2 - ky = 0.$$

Solution géométrique de la question 1191

(voir p. 144);

PAR M. L. THEVENIN,
Élève au Lycée Charlemagne.

Les foyers de toutes les ellipses qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe appartiennent à une même circonférence.

Soient B le point fixe donné; C le centre du cercle osculateur maximum en B; $2a$, $2b$ les axes de l'une quelconque des ellipses considérées; O le centre de cette ellipse; F, F′ ses foyers.

On sait que le point B est une des extrémités du petit axe de l'ellipse, et que le rayon BC du cercle osculateur maximum est égal à $\frac{a^2}{b}$, et coïncide, en direction, avec le petit axe BO de l'ellipse. On a donc

$$\mathrm{BC} = \frac{a^2}{b} = \frac{\mathrm{BF}^2}{\mathrm{BO}};$$

par conséquent, l'angle BFC est droit, et le lieu des foyers F, F' est la circonférence décrite sur BC comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par MM. Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; Launoy, répétiteur au Lycee de Lille; Demartre; A. Tournois; Moret-Blanc; Gambey; H.-W. Wisselink; Claútrier, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Poitiers, classe de M. Longchamps; Ch. Picard, du Lycée de Grenoble, classe de M. Bernard.

Question 1192

(voir p. 144),

PAR M. SEGUE,

Élève au Lycée Charlemagne.

Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

(W. H. BESANT.)

Soient C le centre de l'hyperbole (*); $2a$, $2b$ ses axes; O un point quelconque de cette courbe, considéré comme centre d'une ellipse tangente aux deux asymptotes de l'hyperbole; HH' la corde des contacts, et GG' une tangente au point O à l'hyperbole, et rencontrant ses asymptotes aux points G et G'.

Les droites HH' et GG' sont parallèles, parce qu'elles sont, toutes deux, inscrites dans l'angle des asymptotes, et divisées en deux parties égales, en des points M et O, par la même droite CO.

Soient A, B les points où l'ellipse considérée est rencontrée par OC et OG, et θ l'angle COG ou AOB.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les droites OA, OB sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, et l'aire de cette courbe a pour valeur le produit

$$\pi\, \mathrm{OA}.\mathrm{OB} \sin\theta.$$

Cela posé, menons par le point H et parallèlement à CO la corde HH″ de l'ellipse, dont le milieu I se trouvera sur OG.

Il est facile de voir que le point G est, par rapport à l'ellipse, le pôle de HH″; de sorte qu'on a

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \mathrm{OG} \times \mathrm{OI}$$

ou, parce que OI = MH, comme côtés opposés du parallélogramme OIMH,

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \mathrm{OG} \times \mathrm{MH}.$$

De même, le point C étant le pôle de la corde HH′, dont le milieu est M, on a

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \mathrm{CO} \times \mathrm{OM};$$

d'où

$$(\mathrm{OA}.\mathrm{OB})^2 = (\mathrm{CO}.\mathrm{OG})(\mathrm{OM}.\mathrm{MH}).$$

Mais, les triangles CMH, COG, semblables, à cause du parallélisme des droites MH, OG, donnent

$$\mathrm{MH} = \frac{\mathrm{OG}.\mathrm{CM}}{\mathrm{OC}};$$

donc

$$(\mathrm{OA}.\mathrm{OB})^2 = \mathrm{OG}^2(\mathrm{CM}.\mathrm{OM}),$$

ou

$$(\mathrm{OA}.\mathrm{OB}) = \mathrm{OG}\sqrt{\mathrm{CM}.\mathrm{OM}},$$

D'autre part, les droites OG, OC, étant, en grandeurs et en directions, deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$\mathrm{OG}.\mathrm{OC}.\sin\theta = ab;$$

il s'ensuit

$$OG = \frac{ab}{OC.\sin\theta},$$

d'où

$$OA.OB\sin\theta = \frac{ab}{OC}\sqrt{CM.OM} = ab\sqrt{\left(\frac{CM}{OC}\right)\left(\frac{OM}{OC}\right)}$$

et

$$(1)\qquad \pi\, OA.OB\sin\theta = \pi ab\sqrt{\left(\frac{CM}{CO}\right)\left(\frac{OM}{CO}\right)}.$$

Par conséquent, le maximum de l'aire de l'ellipse correspond au maximum du produit $\left(\frac{CM}{CO}\right)\left(\frac{OM}{CO}\right)$. Or la somme des deux facteurs $\frac{CM}{CO}$, $\frac{OM}{CO}$ de ce produit est constante, car

$$\frac{CM}{CO} + \frac{OM}{CO} = \frac{CO}{CO} = 1;$$

donc le maximum a lieu lorsque

$$\frac{CM}{CO} = \frac{OM}{CO},$$

d'où

$$\frac{CM}{CO} = \frac{1}{2},\quad CM = \frac{1}{2}CO.$$

Cette dernière égalité montre que, dans le cas où l'aire de l'ellipse est un maximum, le lieu géométrique du point M, milieu de la corde des contacts HH′, est une hyperbole concentrique et homothétique à l'hyperbole donnée. Le centre d'homothétie est le point C; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. Les points M et O se correspondent; les droites HH′, GG′ sont parallèles; donc, conformément à l'énoncé, la corde HH′ des contacts de l'ellipse est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Demartre; Moret-Blanc; Gambey; A. Tournois; B. Launoy, répétiteur au Lycée de Lille; L. Thévenin, élève au Lycée Charlemagne.

M. Demartre suppose d'abord qu'une ellipse d'aire constante πr^2, est tangente à deux droites données faisant entre elles un angle θ. En prenant ces deux droites pour axes de coordonnées, et désignant par α, β, les coordonnées du centre de l'ellipse, l'équation de l'ellipse est

$$\beta^2(x-\alpha)^2 + \frac{2Br^4}{\sin^2\theta}(x-\alpha)(y-\beta) + \alpha^2(y-\beta)^2 = \frac{r^4}{\sin^2\theta},$$

avec la condition

$$(2) \qquad B^2 = \frac{\sin^2\theta}{r^4}\left(\alpha^2\beta^2\frac{\sin^2\theta}{r^4} - 1\right).$$

La corde des contacts a pour équation

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}.$$

« Si maintenant nous supposons le centre de l'ellipse assujetti à décrire l'hyperbole $xy = k^2$, nous aurons $\alpha\beta = k^2$, d'où pour la corde des contacts

$$xy + \beta x = k^2 + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}, \quad \text{et} \quad \alpha\beta = k^2.$$

» D'après l'égalité (2) B est constant, dans le cas actuel, et l'enveloppe de la corde des contacts sera

$$(3) \qquad xy = \frac{1}{4k^2}\left(k^2 + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}\right)^2.$$

» Donc :

» *Lorsqu'une ellipse, d'aire constante, touche constamment les asymptotes d'une hyperbole que décrit son centre, la corde des contacts enveloppe une hyperbole ayant les mêmes asymptotes.* »

C'est de cette proposition générale, dont je ne conteste pas l'exactitude, que M. Demartre déduit, comme cas particulier, la proposition relative au maximum de l'aire de l'ellipse.

Je ferai seulement observer que l'équation (2) donne pour B deux valeurs égales et de signes contraires, lorsque l'aire πr^2 de l'ellipse considérée n'est pas maximum. Il en résulte qu'alors l'équation (3) représente deux hyperboles correspondant aux deux valeurs de B.

L'équation (1) établie, p. 236, par M. Segue, conduit à la même conclusion.

Car, en représentant par πr^2, l'aire de l'ellipse, cette équation devient

$$r^2 = ab\sqrt{\left(\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CO}}\right)\left(\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{CO}}\right)};$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CO}}\right)\left(\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{CO}}\right) = \left(\frac{r^2}{ab}\right)^2.$$

D'ailleurs

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CO}} + \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{CO}} = 1;$$

donc le rapport $\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CO}}$ est racine de l'équation du second degré

$$\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + \left(\frac{r^2}{ab}\right)^2 = 0,$$

et l'on a, pour ce rapport, les deux valeurs

$$\frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2r^2}{ab}\right)^2}\right],$$

qui sont réelles, positives et inégales lorsque r^2 est moindre que $\frac{ab}{2}$, c'est-à-dire, lorsque l'aire πr^2 de l'ellipse n'est pas maximum.

Dans ce cas, à chaque position du centre O de l'ellipse, sur l'hyperbole donnée, correspondent deux cordes de contact, parallèles à la tangente menée à l'hyperbole au point O, et rencontrant la droite CO, à des distances de C égales à $\frac{1}{2}\mathrm{CO}\left[1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{2r^2}{ab}\right)^2}\right]$. Il s'ensuit que ces deux cordes sont respectivement tangentes à deux hyperboles concentriques et homothétiques à l'hyperbole donnée. (G).

Question 1193

(voir 2e série, t. XIII, p. 304);

PAR M. ÉDOUARD ROBERT,
Elève en Mathématiques spéciales, au Lycée d'Amiens.

On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe. (W.-H. BESANT.)

Soient SM et SN (*) les deux tangentes; F le foyer et AB une corde de contact. Menons FC perpendiculaire sur SF au point F, cette perpendiculaire sera coupée en C par la corde des contacts AB. Soit I le point d'intersection de AB et de SF. Les quatre points A, I, B, C forment une proportion harmonique (théorème des bissectrices); donc le faisceau (S, AIBC) est harmonique. Or, les trois droites SA, SI, SB de ce faisceau sont fixes; donc la droite SC est déterminée, et, par conséquent, le point C, intersection des droites SC, FC, est fixe et déterminé.

Note. — La même question a été résolue par MM. Demartre; Morel; Lez; Tournois; B. Launoy; Moret-Blanc; Gambey; H.-W. Wisselink; Berthomieu et H. Dessoudeix, élèves au Lycée de Bordeaux; L. Thevenin, du Lycee Charlemagne; Louis Thuillier, du Lycée d'Amiens; Picard, du Lycée de Grenoble; Louis Goulin, du Lycée Corneille, à Rouen (classe de M. Vincent); E. Barthe et Clautrier, élèves au Lycée de Poitiers; G. de Beauséjour et de Coatpont, élèves au Collége Stanislas.

(*) Le lecteur est prie de faire la figure