

ÉDOUARD LUCAS

**Sur un problème de Halley relatif à la  
théorie des sections coniques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 207-209

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_207\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__207_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR UN PROBLÈME DE HALLEY RELATIF A LA THÉORIE  
DES SECTIONS CONIQUES;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

Le problème de Halley, qui consiste dans la détermination de l'orbite d'une planète connaissant trois positions héliocentriques, revient géométriquement à déterminer une conique connaissant un foyer et trois points. Il existe un grand nombre de solutions de ce problème, et notamment celle de *Nicollic*, qui est indiquée dans le *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique* de M. Catalau (t. I<sup>er</sup>, p. 470).

La méthode suivante nous paraît nouvelle et revient à ce problème bien connu de Géométrie descriptive : *Trouver la trace horizontale d'un plan dont on connaît les projections de trois points.*

Prenons, en effet, pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer de la conique; désignons par  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  les distances d'un point quelconque de la conique cherchée et des trois points donnés à ce foyer, et par

$$lx + my + n = 0$$

l'équation de la directrice.

On a, par définition, pour l'équation de la conique

$$x^2 + y^2 - lx + my + n^2,$$

et, par suite, les équations

$$\begin{aligned} \pm r &= lx + my + n, \\ \pm r_1 &= lx_1 + my_1 + n, \\ \pm r_2 &= lx_2 + my_2 + n, \\ \pm r_3 &= lx_3 + my_3 + n. \end{aligned}$$

On obtient, par l'élimination de  $l, m, n$ , l'équation de la conique cherchée sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} -r & x & y & 1 \\ \pm r_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \pm r_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \pm r_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient  $O_1, O_2, O_3$  les trois points donnés,  $O$  un point quelconque de la conique, et  $F$  le foyer ; si l'on mène hors du plan des droites  $OP, O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3$  parallèles à une direction quelconque prise pour axe des  $r$ , et respectivement proportionnelles à  $OF, O_1F, O_2F, O_3F$ , il résulte immédiatement de l'équation précédente que les points  $P, P_1, P_2, P_3$  sont situés dans un même plan ; de plus, on obtient l'équation de la directrice en remplaçant  $r$  par zéro ; on a ainsi la proposition suivante :

**THÉORÈME.** — *Si en chacun des points d'une conique on mène hors du plan des parallèles à une direction quelconque et dont les longueurs soient respectivement proportionnelles aux rayons focaux correspondants, les extrémités de ces parallèles seront situées (sur une conique) dans un plan passant par la directrice.*

Ce théorème, qu'il est facile de démontrer géométri-

quement, subsiste en remplaçant le foyer par un cercle focal, le rayon focal par la puissance du point par rapport à ce cercle et la directrice par la corde de contact.

Inversement, connaissant trois points et un cercle focal d'une conique, si l'on élève, en chacun de ses points et perpendiculairement au plan, des droites respectivement proportionnelles à la racine carrée de la puissance de ces points par rapport au cercle focal, le plan passant par les extrémités de ces droites rencontrera le plan du cercle focal suivant la corde de contact correspondante. L'indétermination du signe de la racine carrée donne ainsi quatre solutions et, dans le cas particulier du problème de Halley, trois hyperboles au moins.

Le théorème précédent permet encore de ramener la recherche des sécantes communes de deux coniques focales (ayant un seul foyer commun) au problème de Géométrie descriptive relatif à l'intersection de deux plans donnés.

Soient, en effet,  $F, D, P$  le foyer, la directrice et un point de la première conique;  $D', P'$  la directrice et un point de la seconde.

Élevons en  $P$  une perpendiculaire au plan  $PQ$ , égale à  $PF$ , et en  $P'$  une perpendiculaire  $P'Q'$  égale à  $P'F'$ ; la projection de l'intersection des deux plans menés par  $Q$  et  $D$  et par  $Q'$  et  $D'$  sur le plan des deux coniques représentera l'une des cordes communes; on obtiendra l'autre en portant les deux perpendiculaires dans des sens différents.