NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 205-207

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__205_1>

SUR LA RELATION DE MÖBIUS, QUI EXPRIME QUE QUATRE POINTS D'UN PLAN SONT SITUÉS SUR UN CERCLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Möbius a obtenu le premier, à l'aide des principes du calcul barycentrique (*Journal de Crelle*, t. 16, p. 26), la relation qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. M. Cayley a obtenu le même résultat à l'aide de la théorie des déterminants; on peut interpréter et généraliser le théorème en question de la manière suivante.

Désignons par

$$X_i = x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c_i$$

le premier membre de l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires; on sait que c_i et X_i représentent respectivement la puissance de l'origine et d'un point quelconque du plan dont les coordonnées sont x et y, par rapport à ce cercle. On déduit, des quatre équations

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1-X_1=0,$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2-X_2=0,$$
$$x^2+y^2-2a_3x-2b_3y+c_3-X_3=0,$$
$$x^2+y^2-2a_4x-2b_4y+c_4-X_4=0,$$

par l'élimination linéaire de x, y et de x^2+y^2, l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1-X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2-X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3-X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4-X_4 \end{vmatrix}=0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & X_4 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière équation est l'expression analytique du théorème suivant :

Théorème. — *Si par les centres de quatre cercles situés dans un plan on élève des perpendiculaires au plan, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant.*

Si les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, le centre de ce cercle a la même puissance par rapport aux quatre cercles, et le tétraèdre correspondant a un volume nul, puisque ses sommets sont dans un plan parallèle au plan considéré. Donc :

Théorème. — *Pour que quatre cercles soient orthogo-*

naux à un même cercle, il faut que les extrémités des perpendiculaires, menées au plan par les centres de ces cercles, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport à ces quatre cercles, soient situées dans un même plan.

On obtient la condition pour que quatre points d'un plan soient situés sur un cercle en supposant que les quatre cercles du théorème précédent se réduisent à leurs centres.