

A. VACHETTE

**Permutations rectilignes de  $3q$  lettres  
égales 3 à 3, quand 3 lettres consécutives  
sont distinctes ; calcul de la formule  
générale ; applications**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 193-205

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__193_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE  $3q$  LETTRES ÉGALES 3 A 3,  
QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES;  
CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE; APPLICATIONS;

PAR M. A. VACHETTE.

[SUIVE (\*).]

---

XI. *Des variétés d'une même espèce; moyen de simplifier le calcul.*

Le nombre  $C_{q,3}$  contient le facteur  $P_q$ , et le quotient  $c_q = \frac{C_q}{P_q}$  désigne le nombre des variétés; car, si l'on prend une des permutations de cette espèce, les  $q$  premières lettres  $a, b, c, \dots$  de chaque série de trois lettres semblables forment une des permutations simples de l'espèce  $P_q$ ; et, si l'on forme toutes les permutations de cette espèce, en ayant soin que les mêmes systèmes de places soient occupés par trois lettres semblables, on ne change pas la nature de la permutation; les numéros, occupés par trois lettres semblables, demeurent les mêmes; toutes les permutations correspondantes sont comprises dans ce qu'on appellera une même *variété*. Donc

$$C_{q,3} = P_q \cdot c_{q,3}.$$

Tout nombre  $N_q(\alpha)$ , où  $\alpha$  est la désignation du nombre et de l'espèce des intervalles qui entrent dans la permutation, contient en général le facteur  $3qP_q$ , et le quotient

$$n_q(\alpha) = \frac{N_q(\alpha)}{3qP_q}$$
 désigne le nombre des variétés de cette

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 145.

espèce. L'existence du facteur  $P_q$  se rencontre pour  $N_q(\alpha)$ , comme pour  $C_{q,3}$ ; mais, comme on peut ici commencer la permutation par l'une de ses  $3q$  lettres, sans changer la variété à laquelle elle appartient, les lettres situées en dehors des intervalles occupant toujours les mêmes systèmes de places par rapport à ces intervalles, le nombre  $N_q(\alpha)$  est divisible (*en général*) par  $3q$ , et  $\frac{N_q(\alpha)}{3qP_q}$  désigne bien le nombre des variétés. Donc

$$N_q(\alpha) = 3qP_q n_q(\alpha).$$

On peut voir sur la formule abrégée (X)

$$C_{q,3} = \frac{1}{2} q (3q - 7) (3q - 8) C_{q-1,3} + \frac{q}{q-1} \Sigma,$$

où  $\Sigma$  est une somme de termes de la forme  $N_{q-1}(\alpha)$ , l'existence du facteur  $P_q$  dans  $C_{q,3}$ ; car  $C_{q-1,3} = P_{q-1} c_{q-1,3}$  et chacun des termes de  $\Sigma$  contient en général le facteur  $3(q-1)P_{q-1}$ , de sorte que, 6 étant ce que devient  $\Sigma$  quand on le divise par ce facteur,

$$C_{q,3} = \frac{1}{2} q (3q - 7) (3q - 8) P_{q-1} c_{q-1,3} + \frac{q}{q-1} 3(q-1) P_{q-1} 6 \\ \frac{1}{2} (3q - 7) (3q - 8) P_q c_{q-1,3} + 3P_q 6,$$

d'où

$$\frac{1}{3P_q} C_{q,3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (3q - 7) (3q - 8) c_{q-1,3} + 6;$$

on écrit simplement  $c_q$  ou  $c_{q-1}$  au lieu de  $c_{q,3}$  et  $c_{q-1,3}$ .

J'ai dit plus haut *en général*, car il y a des exceptions :  $\frac{N_q(\alpha)}{P_q}$  n'est pas toujours divisible par  $3q$ .

Un premier cas se présente quand  $\alpha$  désigne un seul intervalle formant à lui seul la permutation; on n'a à considérer que les deux espèces  $N_2(s_6)$  et  $N_q(t_{3q})$ .

Pour  $N_2(s_6) = 2$  (IV), on a vu qu'elle ne contenait qu'une variété symétrique de fraction  $\frac{1}{6}$ ; d'où

( 195 )

$n_2(s_6) = \frac{N_2(s_6)}{6P_2} = \frac{1}{6}$ . Pour  $N_q(t_{3q}) = 3P_q$ , il n'y a qu'une variété symétrique de fraction  $\frac{1}{q}$  (IV), d'où  $n_q(t_{3q}) = \frac{N_q(t_{3q})}{3qP_q} = \frac{1}{q}$ , et en particulier  $n_3(t_9) = \frac{1}{3}$ .

Un deuxième cas se présente quand  $\alpha$  désigne plusieurs intervalles, et que la permutation peut se partager en  $x$  groupes, tous composés de la même manière, ce qui n'a souvent lieu que pour certaines variétés de l'espèce  $N_q(\alpha)$ ;  $x$  est inférieur ou au plus égal à  $q$  et diviseur de  $P_q$ . L'une de ces variétés donnera  $\frac{3qP_q}{x}$  permutations et ne comptera que pour  $\frac{1}{x}$  dans le nombre  $n_q(\alpha)$ ; d'ailleurs, dans ce cas,  $\alpha$  contient souvent plusieurs intervalles identiques de composition, et, en étudiant le nombre des variétés par rapport à l'un des intervalles, on divise le nombre trouvé par le nombre des intervalles.

On peut croire que la formule est illusoire pour  $q=3$ ; mais on a

$${}^2_3C_{3,3} = 2N_2(s_6), \text{ d'où } C_{3,3} = 6 = P_3,$$

ce que l'on vérifie directement; on a la seule variété

$$abcabcabc,$$

et par suite  $c_3 = 1$ .

En développant le 6 qu'on a écrit plus haut, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3P_q} C_{q,3} = & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (3q-7)(3q-8)C_{q-1} + n_{q-1}(t_{10}) + 2n_{q-1}(t_9) \\ & + 2n_{q-1}(t'_9) + 4n_{q-1}(t_8) + 4n_{q-1}(t'_8) + (3q-7)n_{q-1}(p_7) \\ & + (6q-16)n_{q-1}(p_6) + (9q-25)n_{q-1}(p_5) \\ & + (3q-7)n_{q-1}(s_6) + (6q-16)n_{q-1}(s_5) \\ & + \frac{1}{2}(3q-5)(3q-8)n_{q-1}(s_4) + (3q-7)(3q-8)n_{q-1}(s_3) \\ & + n_{q-1}(p_7, s_4) + 2n_{q-1}(p_7, s_3) + 2n_{q-1}(p_6, s_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} P_q C_q = & -4n_{q-1}(p_6 s_3) + 3n_{q-1}(p_5 s_4) + 6n_{q-1}(p_5 s_3) + n_{q-1}(s_6 s_4) \\ (\text{suite}) = & -2n_{q-1}(s_6 s_3) + 2n_{q-1}(s_5 s_4) + 4n_{q-1}(s_5 s_3) \\ & + (3q - 7) n_{q-1}(2s_4) + (6q - 16) n_{q-1}(s_4 s_3) \\ & + (12q - 36) n_{q-1}(2s_3) + n_{q-1}(2s_3)_0 \\ & + n_{q-1}(3s_4) + 2n_{q-1}(2s_4 s_3) + 4n_{q-1}(s_4 2s_3) + 8n_{q-1}(3s_3). \end{aligned}$$

Dans les formules qu'on pourra établir pour les calculs des espèces  $N_q(x)$ , on calculera ordinairement le nombre des variétés  $n_q(x)$ , ce qui simplifie l'écriture.

## XII. Décomposition des $B_{3,3}$ ; valeurs de $C_{3,3}$ et $c_3$ .

On a trouvé

$$B_{3,3} = 22P_3.$$

On a trouvé

$$C_{3,3} = P_3 \quad \text{et} \quad c_3 = 1 \quad (\text{XI}).$$

Dans les espèces à un intervalle, il n'existe que  $N_3(t_9) = 3P_3$ , d'où  $n_3(t_9) = 1$ .

Dans les espèces à deux intervalles, il n'existe que :

1°  $N_3(p_5, s_4) = 9P_3$  (IV); abaca et bcbcb sont complémentaires; d'où  $n_3(p_5, s_4) = 1$ .

2°  $N_3(2s_3)_0 = 9P_3$ ; il n'y a qu'une seule variété asymétrique

$$\underline{abacbcabc},$$

d'où  $\frac{1}{3} P_3 N_3(2s_3)_0 = 1$ , et par suite  $n_3(2s_3)_0 = 1$ ; et d'ailleurs  $n_3(2s_3) = 1$ .

On verrait directement qu'il n'y a point d'autres espèces; mais la décomposition est maintenant complète, car

$$\begin{aligned} C_3 = & N_3(t_9) + N_3(2s_3)_0 + N_3(p_5, s_4) \\ = & P_3 + 3P_3 + 9P_3 + 9P_3 = 22P_3 = B_{3,3}. \end{aligned}$$

Si l'on applique la formule  $C_{q,3}$  (XI) pour  $q = 4$ , et qu'on prenne  $n_3(t_9)$  au lieu de  $2n_3(t_9)$  (V et VII), on

aura

$$\frac{1}{3P_4} C_{4,3} = \frac{1}{3} 10c_3 + n_3(t_9) + 3n_3(p_5s_4) + 12n_3(2s_3) + n_3(2s_3) \\ = \frac{1}{3} 10 + \frac{1}{3} + 3 + 12 + 1 = 19 + \frac{2}{3}.$$

$$C_{4,3} = 59P_4 \quad \text{et} \quad c_4 = 59.$$

XIII. *Décomposition des espèces à plusieurs intervalles, quand il y a lieu.*

1° Sept de ces espèces sont indécomposables :

$$N_q(p, s_1); \quad \underline{ababc}bc \quad \text{et} \quad \underline{dede}, \quad q \geq 5,$$

$$N_q(s_6, s_4); \quad \underline{ababab} \quad \text{et} \quad \underline{cdcd}, \quad q \geq 5,$$

$$N_q(s_6, s_3); \quad \underline{ababab} \quad \text{et} \quad \underline{cdc}, \quad q \geq 5,$$

$$N_q(s_3, s_4); \quad \underline{ababa} \quad \text{et} \quad \underline{cdcd}, \quad q \geq 4,$$

$$N_q(3s_4); \quad \underline{abab}, \underline{cdcd} \quad \text{et} \quad \underline{efef}, \quad q \geq 6,$$

$$N_q(2s_4); \quad \underline{abab}, \underline{cdcd} \quad \text{et} \quad \underline{q} > 4.$$

2° Six se décomposent en deux espèces  $N_q(p_7, s_3)$ ; avec le  $p_7$ ,  $\underline{ababc}bc$ ,  $s_3$  a, ou non, une lettre commune, de sorte qu'il entre quatre ou cinq lettres distinctes dans les deux intervalles, ce qu'on indique par l'exposant 4 ou 5 donné à la parenthèse. On aura

$$\left. \begin{array}{l} N_q(p_7, s_3, 4) \\ N_q(p_7, s_3, 5) \end{array} \right\} \underline{ababc}bc \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{dad} \quad \text{ou} \quad \underline{dcd} \\ \underline{ded} \end{array} \right\}; \quad q \geq 5;$$

la première est à variétés réciproques.

$N_q(p_6, s_1)$ , avec le  $p_6$ ,  $\underline{abacac}$  ou  $\underline{cacaba}$ ,  $s_1$  a, ou non, une lettre commune; on a deux espèces à variétés réciproques :

$$\left. \begin{array}{l} N_q(p_6, s_1, 4) \\ N_q(p_6, s_1, 5) \end{array} \right\} \underline{abacac} \quad \text{ou} \quad \underline{cacaba} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{bdbd} \quad \text{ou} \quad \underline{dbdb}, \quad q \geq 4, \\ \underline{dede}, \quad q \geq 5. \end{array} \right.$$

$N_q(s_1, s_3)$ ; avec le  $s_1$ ,  $\underline{ababa}$ ,  $s_3$  a, ou non, une lettre

commune :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{N}_q(s_1, s_3^3) \\ \mathbb{N}_q(s_2, s_3^4) \end{array} \right\} \underline{ababa} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{cbc} \\ \underline{cdc} \end{array} \right\}; q \geq 5.$$

$\mathbb{N}_q(s_4, s_3^4)$ ; avec le  $s_4$ , abab,  $s_3$  a, ou non, une lettre commune :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{N}_q(s_1, s_1^3) \\ \mathbb{N}_q(s_4, s_1^4) \end{array} \right\} \underline{abab} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{cbc} \text{ ou } \underline{cac} \\ \underline{cdc} \end{array} \right\}; q \geq 4,$$

la première est à variétés réciproques.

$\mathbb{N}_q(2s_3)_0$ ; avec aba, le  $s_3$  consécutif est cbc ou cdc; dans le premier cas, ils ont même médiane, ce qu'on indique par  $\circ s_3 m_1$  :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{N}_q(2s_3 m_1)_0 & \underline{aba} \quad \underline{cbc} & q = 3, \quad q = 4 \text{ manque,} \\ \mathbb{N}_q(2s_3)_0^4 & \underline{aba} \quad \underline{cdc} & q = 4, \end{array}$$

$2s_3 m_1$  indique suffisamment qu'il n'y a que trois lettres distinctes.

$\mathbb{N}_q(2s_4, s_3)$ ; avec l'un des deux  $s_4$ , dbab et cdcd,  $s_3$  a, ou non, une lettre commune :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{N}_q(2s_4, s_3) \\ \mathbb{N}_q(\circ s_4, s_3^6) \end{array} \right\} \underline{abab}, \underline{cdcd} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{cae}, \text{ ou } \underline{cbe}, \underline{ece}, \underline{ede}, q \geq 5, \\ \underline{cfe} \quad \quad \quad q \geq 6, \end{array} \right.$$

la première est à variétés réciproques.

3° Une espèce se décompose en trois  $\mathbb{N}_q(p_5 s_4)$ , selon que  $s_4$  a deux lettres communes avec  $p_5$ , une seule ou aucune :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{N}_q(p_5 s_4^1), \underline{bcbc}, \text{ ou } \underline{cbcb}, q = 3, q = 4 \text{ et } q = 5 \text{ manquent,} \\ \mathbb{N}_q(p_5 s_4^4), \underline{abaca} \text{ avec } \underline{bdbd}, \text{ ou } \underline{bdbb}, \underline{cdcd}, \underline{dcdc}, q = 4, \\ \mathbb{N}_q(p_5 s_4^2) \quad \quad \quad \underline{dede} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad q \geq 5; \end{array}$$

la première a ses deux intervalles complémentaires et peut être désignée par  $\mathbb{N}_q(p_5 s_3)^e$ ; les deux premières sont à variétés réciproques.

4° Deux se décomposent en quatre espèces.

$N_q(p_5, s_3)$ ; avec le  $p_5$ , abaca,  $s_3$  peut avoir deux lettres communes, une seule extrême ou médiane de  $s_3$ , aucune :

$$\begin{array}{l} N_q(p_5, s_3)^3 \\ N_5(p_5, s_3^4, m_3) \\ N_5(p_5, s_3^4, m_2) \\ N_5(p_5, s_3)^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{abaca} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{bcb} \text{ ou } \underline{cbc}, \quad q \geq 5, \\ \underline{bdb} \text{ ou } \underline{cdc}, \quad q \geq 4, \\ \underline{dbd} \text{ ou } \underline{dcd}, \quad q > 4, \\ \underline{dcd} \quad \quad \quad \quad \quad q \geq 5. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les notations  $m_3$  et  $m_2$ , placées après la parenthèse, signifient que  $p_5$  et  $s_3$  ont trois ou deux médianes distinctes.

$N_q(2s_3)$ ; avec aba, le second  $s_3$  est bab, cac, cbc, cdc;

on aura

$$\begin{array}{l} N_q(2s_3^5), \quad q > 5, \\ N_q(2s_3^4, m_2), \quad \underline{aba} \text{ avec } \underline{bcb} \text{ ou } \underline{cac}; \end{array}$$

il y a trois lettres distinctes, ce qu'indique la notation  $2s_3^3$  et deux médianes distinctes : elle est à variétés réciproques,  $q \geq 4$ .

$$N_q(2s_3^3, m_1), \quad q = 3,$$

$$N_q(2s_3^4), \quad q > 4,$$

5° Une espèce se décompose en cinq,  $N_q(p_6, s_3)$ . à variétés réciproques :

$$N_q(p_6, s_3^5), \quad \frac{\underline{abacac}}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{bcb}, \quad q > 6,$$

$$N_q(p_6, s_3^4, m_1), \quad \frac{\underline{abacac}}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{dbd},$$

il y a même médiane:  $q > 4$  :

$$N_q(p_6, s_3^4, m_2), \quad \frac{\underline{abacac}}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{bdb},$$



deux médianes différentes et trois lettres intérieures distinctes  $b, c, d$ , d'où la notation  $m_2^3$ ;  $q < 5$  :

$$N_q(p_6, s_3)^4 m_2^3, \frac{abacac}{\underline{cacab a}} \text{ avec } \underline{dcd},$$

deux médianes différentes et deux lettres intérieures distinctes  $b, c$ , d'où la notation  $m_2^2$ ;  $q \geq 5$  :

$$N_q(p_6, s_3)^5, \frac{abacac}{\underline{cacac a}} \text{ avec } \underline{ded}; q \geq 5.$$

6° L'espèce  $N_q(s_4, 2s_3)$  se décompose en sept :

$$\left. \begin{array}{l} N_q(s_4, 2s_3)^c \\ N_q(s_4, 2s_3^2 m_2)^4 \\ N_q(s_4, 2s_3^4)^4 \\ N_q(s_4, 2s_3^3 m_2)^5 \\ N_q(s_4, 2s_3 m_1) \\ N_q(s_4, 2s_3^4)^5 \\ N_q(s_4, 2s_3^4) \end{array} \right\} \underline{abab} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \underline{cdc}, \underline{dcd}; q \geq 4, \\ \underline{cac}, \underline{dbd}; q \geq 4, \\ \underline{cbc}, \underline{dbd}; q \geq 4, \\ \underline{cac}, \underline{dbd}; q \geq 4, \\ \underline{cdc}, \underline{ded}; q \geq 5, \\ \underline{cdc}, \underline{ede}; q \geq 5, \\ \underline{cac}, \underline{ded}; q \geq 5, \\ \underline{cbc}, \underline{ded}; q \geq 5, \\ \underline{cdc}, \underline{efe}; q \geq 6. \end{array} \right.$$

7° L'espèce  $N_q(3s_3)$  se décompose en huit :

$$\begin{array}{l} N_q(3s_3^3 c); \underline{aba}, \underline{bcb} \text{ et } \underline{cac}; q \geq 4, \\ N_q(2s_3^2 s_3); \underline{aba}, \underline{bab} \text{ et } \underline{cdc}; q \geq 5, \\ N_q(3s_3 m_1); \underline{aba}, \underline{cbc}, \underline{dbd}; q \geq 4, \\ N_q(3s_3^4 m_2); \underline{aba}, \underline{cbc}, \text{ et } \frac{dad}{\underline{dcd}}; \end{array}$$

il y a quatre lettres distinctes et deux médianes différentes;  $q \geq 4$  :

$$N_q(2s_3^4 m_2, s_3^4 m_3); \underline{aba}, \underline{bcb} \text{ et } \frac{dad}{\underline{cdc}};$$

quatre lettres distinctes et trois médianes différentes. On voit que  $\underline{aba}$ ,  $\underline{bcb}$ ,  $\underline{dad}$  donnent la même espèce que  $\underline{aba}$ ,  $\underline{bcb}$ ,  $\underline{cdc}$  ou  $\underline{bcb}$ ,  $\underline{cdc}$ ,  $\underline{aba}$ ; dans la première suite, la médiane  $c$  n'entre qu'une fois comme lettre, et dans la deuxième suite, c'est la médiane  $d$ ;  $q \geq 4$  :

$$\begin{aligned} N_q(2s_3^2 m_2, s_3)^3; & \underline{aba}, \underline{bcb}, \underline{ded}; q \geq 5, \\ N_q(2s_3 m_1, s_3)^3; & \underline{aba}, \underline{cbc}, \underline{ded}; q \geq 5, \\ N_q(3s_3)^6; & \underline{aba}, \underline{cdc}, \underline{efe}; q \geq 6. \end{aligned}$$

XIV. Calcul direct de ces espèces pour  $q = 4$ , valeurs de  $C_{3,3}$  et de  $c_5$ .

On ne calculera que les nombres de variétés.

1° Termes à un intervalle.

On voit aisément que  $n_4(s_5)$ ,  $n_4(s_6)$ ,  $p_4(p_6)$ ,  $n_4(p_7)$  n'existent pas; par exemple, avec le  $p_6$ ,  $\underline{abacac}$ , on ne peut associer utilement les six lettres  $bb$ ,  $c$ ,  $ddd$ .

$n_4(t_{10})$ ,  $n_4(t_9)$ ,  $n_4(t'_9)$ ,  $n_4(t_8)$  et  $n_4(t'_8)$  n'existent pas plus que  $n_3(p_7)$ ,  $n_3(s_6)$ ,  $n_3(p_6)$ ,  $n_3(s_5)$  et  $n_3(p_5)$ , auxquels ils se ramènent.

$$\begin{aligned} n_4(p_5) &= 2 \quad \underline{abaca} d^{bc} d^{bc} d, \\ n_4(s_4) &= 2 \quad \underline{abab} cd^a cd^b cd, \\ n_4(s_3) &= 16 \quad \underline{aba} \left| \begin{array}{l} cb d^a, b, d^c, c, d \dots \quad 4 \\ cd a^{bcd} b^a d \dots \dots \quad 3 \\ cd b \left| \begin{array}{l} a^d b^c d \dots \dots \quad 2 \\ c^d abcd \dots \dots \quad 7 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \frac{7}{16} \end{aligned}$$

2° Termes à deux intervalles; on a vu (XIII) ceux qui existent pour  $q = 4$  :

$$\begin{aligned} n_4(s_3 s_4) &= 2 \quad \underline{ababa} cdcd acd \dots \dots \quad 1 \\ & \quad \text{La reciproque} \dots \dots \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$n_4(p_6, s_4) = 2$ . Il n'y a que la subdivision  $n_4(p_6, s_4)^4$ ,

$$\frac{a \underline{bac} \underline{ac} \underline{dbdb} \underline{cd} \dots \dots \dots 1}{\dots \dots \dots}$$

$$\text{La r\u00e9ciproque} \dots \dots \dots 1$$

---

2

$n_4(s_4 s_2) = 12 = n_4(s_4 s_2)^3 + n_4(s_4 s_2)^4 = 4 + 8$ ,

$$\frac{abab \underline{d} \underline{cbc} \underline{dard} \dots \dots \dots 1}{\dots \dots \dots}$$

$$\underline{d} \underline{cad} \underline{cbc} \underline{d} \dots \dots \dots 1$$

---

2

$$\text{Les r\u00e9ciproques} \dots \dots \dots 2$$

---

4

$$\frac{abab \underline{cdc}, \underline{d}^{bc} \underline{d} \dots \dots \dots 3}{\dots \dots \dots}$$

$$\underline{d} \underline{acdc} \underline{bdc} \dots \dots \dots 1$$

---

$$\text{Les r\u00e9ciproques} \dots \dots \dots 4$$

---

8

$n_4(p_5, s_4) = 2$ ; il n'y a qu'une subdivision  $n_4(p_5, s_4)^4$ ,

$$\frac{abaca \underline{b} \underline{dc} \underline{dc} \underline{bd} \dots \dots \dots 1}{\dots \dots \dots}$$

$$\text{La r\u00e9ciproque} \dots \dots \dots 1$$

---

2

$n_4(p_5, s_3) = 6 = n_4(p_5, s_3)^4 m_1 + n_4(p_5, s_3)^4 m_2 = 4 + 2$ .

$$\frac{abaca \underline{dc} \underline{bdb} \underline{cd} \dots \dots \dots 1}{\dots \dots \dots}$$

$$\text{La r\u00e9ciproque} \dots \dots \dots 1$$

---

2

$$\frac{abaca \underline{dbd} \underline{cbdc} \dots \dots \dots 1}{\dots \dots \dots}$$

$$\underline{dbc} \underline{dbd} \underline{c} \dots \dots \dots 1$$

---

2

$$\text{Les r\u00e9ciproques} \dots \dots \dots 2$$

---

4

$n_4(2s_2) = 24 = n_4(2s_2)^3 m_2 + n_4(2s_2) m_1 + n_4(2s_2)^4$

$$4 + 7 + 13,$$

et en même temps

$$n_4(2s_4)_0 = 7,$$

$$\frac{aba \ d \ bcb \ dcadc \dots \dots}{cd \ bcb \ dacd \dots \dots} \quad 1$$

$$\frac{\dots \dots}{\dots \dots} \quad 1$$

—

2

Les réciproques..... 2

—  
4

$$\frac{aba \ d \ bcb \ d^{abcd} \dots \dots}{\dots \dots} \quad 7$$

$$\frac{aba \ cdc \ a \ bd \ cbd \dots \dots}{b^{abcd} \dots \dots} \quad 1$$

$$\frac{\dots \dots}{\dots \dots} \quad 6$$

$$\frac{aba \ db \ cdc \ d^{abcd} \dots \dots}{\dots \dots} \quad 5$$

$$\frac{aba \ dba \ cdc \ bdc \dots \dots}{\dots \dots} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{cdb \quad abd \dots \dots}{\dots \dots} \quad \frac{1}{2}$$

{ Ce sont des variétés symétriques de fraction  $\frac{1}{2}$ .

—  
13

$n_4(p_6s_3)$  4; il n'y a qu'une subdivision  $n_4(p_6s_3)m_1$ ,

$$\frac{a \ bac \ ac \ dbd \ cbd \dots \dots}{\dots \dots} \quad 1$$

$$\frac{dbc \ dbd \dots \dots}{\dots \dots} \quad 1$$

—

2

Les réciproques... 2

—  
4

$$n_4(2s_4) = \frac{11}{2}$$

$$\frac{abab \ cdc \ d^{abcd} \dots \dots}{\dots \dots} \quad 5$$

$$\frac{abab \ da \ cdc \ d \ bc \dots \dots}{\dots \dots} \quad \frac{1}{2}$$

{ Variété symétrique de fraction  $\frac{1}{2}$ .

—  
5 —  $\frac{1}{2}$

3° Termes à trois intervalles :

$$n_4(s_4, 2s_3) = 8 \quad n_4(s_4, 2s_3^2) + n_4(s_4, 2s_3^2, m_2)^4 + n_4(s_4, 2s_3^4)^4 \\ = 8 - 4 = 4,$$

( 204 )

$$\frac{aba^{cd}}{\quad} \frac{bab}{\quad} \frac{cdcd}{\quad} \dots \quad 2$$

$$\frac{ababd}{\quad} \frac{bcb}{\quad} a \left| \begin{array}{l} cdcd \dots \\ dcdc \end{array} \right. \quad 2$$

Les réciproques. . . . . 2

4

$$\frac{abacdc}{\quad} a \left| \begin{array}{l} bdbd \\ dbdb \end{array} \right| c \dots \quad 2$$

$$n_{1,1}(3s_3) = 10 \quad n_1(3s_3)^c + n_1(2s_3^2 m_2, s_3)^4 m_3$$

$$+ n^4(3s_3^4 m_2) + n_1(3s_3 m_1) = \frac{2}{3} + 2 + 6 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{ababd}{\quad} \frac{bcb}{\quad} \frac{dcac}{\quad} d \dots \quad \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variétés symétri-} \\ \text{ques de frac-} \\ \text{tion } \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

La réciproque. . . . .  $\frac{1}{3}$

2

$$\frac{ababd}{\quad} \frac{bcb}{\quad} da \frac{cdc}{\quad} \dots \quad 1$$

La réciproque. . . . . 1

2

$$\frac{aba^{cd}}{\quad} a \frac{bcb}{\quad} \frac{dcd}{\quad} \dots \quad 2$$

$$\frac{cd}{\quad} \frac{bcb}{\quad} a \frac{dcd}{\quad} \dots \quad 1$$

3

Les réciproques. . . . . 3

6

$$\frac{abacbc}{\quad} \frac{dbd}{\quad} \frac{acd}{\quad} \dots \quad 1$$

$$\frac{ababd}{\quad} \frac{c}{\quad} \frac{bcb}{\quad} a \frac{dbd}{\quad} c \dots \quad \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variété symétri-} \\ \text{que de frac-} \\ \text{tion } \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

$\frac{1}{3}$

4° La formule  $C_{q,3}$ , si l'on y fait  $q = 5$ , donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} P_5 C_{5,3} &= \frac{1}{3} (8c_{1,1} + 20n_1(p_5) + 35n_4(s_5) + 56n_1(s_3)) \\ &= 2n_1(p_5 s_4) + 4n_1(p_6 s_3) + 3n_1(p_5 s_4) \\ &+ 6n_1(p_5 s_3) + 2n_1(s_5 s_4) + 8n_1(2s_4) \\ &+ 14n_1(s_1 s_4) + 24n_1(2s_3) + n_1(2s_3^2) \\ &+ 4n_1(s_4, 2s_3) + 8n_1(3s_3) \end{aligned}$$

substituant  $c_1 = 59$ , et tous les nombres qu'on vient de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} P_3 C_{3,1} &= \frac{1}{3} 28 \cdot 59 + 20 \cdot 2 + 35 \cdot 2 + 56 \cdot 16 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ &\quad - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{11}{2} + 14 \cdot 12 + 24 \cdot 24 \\ &\quad - 7 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 10 \\ &\quad \downarrow \cdot 1652 + 40 + 70 + 896 + 4 + 16 + 6 + 36 \\ &\quad + 4 - 44 + 168 + 576 + 7 + 32 + 80 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1652 + 1979. \end{aligned}$$

$$C_{3,1} = P_3(1652 + 3 \cdot 1979) = P_3(1652 + 5937) = P_3 \cdot 7589,$$

$$c_3 = 7589,$$

résultat que j'ai vérifié directement.