

EDMOND DE LAMAZE

**Concours d'admission à l'École centrale
(1875), composition de juillet**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 177-180

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1873),

COMPOSITION DE JUILLET;

PAR M. EDMOND DE LAMAZE,

Élève en mathématiques spéciales chez les Dominicains, à Sorrèze
(classe de M. Dumont).

Étant donnés sur un plan deux points fixes F, A :

1° *Trouver l'équation générale des courbes du second degré qui, situées dans ce plan, ont un foyer en F et un sommet de l'axe focal en A ;*

2° *Déterminer le genre de la courbe représentée par cette équation générale, selon la valeur du paramètre variable qu'elle renferme ;*

3° *Disposer de ce paramètre variable de façon que la courbe du second degré passe par un point donné P,*

et discuter le nombre et le genre des solutions obtenues, selon la position du point P dans le plan.

1° Prenons pour axe des x la droite AF et pour axe des y la perpendiculaire Ay à AF. Soit AF = a ; l'équation générale des coniques ayant un foyer en F et pour axe focal l'axe des x est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + p)^2,$$

où m et p représentent deux paramètres arbitraires; et, comme l'origine A est, dans le cas actuel, un sommet, l'équation précédente admet la solution

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{d'où} \quad P = a.$$

Donc l'équation générale des courbes du second degré, qui ont un foyer en F et un sommet de l'axe focal en A, est

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + a)^2$$

ou

$$(1) \quad (1 - m^2)x^2 + y^2 - 2a(1 + m)x = 0.$$

2° Le genre de la courbe représentée par cette équation dépend de la valeur de $1 - m^2$. Suivant qu'on a

$$1 - m^2 > 0, \quad 1 - m^2 = 0, \quad 1 - m^2 < 0,$$

l'équation représente une ellipse ou une parabole, ou une hyperbole.

3° Pour que la courbe du second degré passe par un point P, ayant pour coordonnées α et β , il faut qu'on ait

$$(1 - m^2)\alpha^2 + \beta^2 - 2a(1 + m)\alpha = 0,$$

d'où

$$(2) \quad \alpha^2 m^2 + 2a\alpha m - \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha = 0,$$

équation qui détermine les valeurs du paramètre variable m .

La nature des racines de cette équation dépend du signe de l'expression

$$a^2 z^2 + \alpha^4 - 2 a z^3 + 6^2 z^2,$$

qui est la somme de deux carrés

$$(\alpha^2 - a z)^2 + 6^2 z^2.$$

On voit, d'après cela, que le problème proposé admet, en général, deux solutions.

Néanmoins, lorsque $\alpha = 0$ et $\alpha = a$, l'expression $(\alpha^2 - a z)^2 + 6^2 z^2$ s'annule, et l'on ne trouve pour m qu'une seule valeur, qui est

$$m = - \frac{z^2}{a^2} = -1.$$

L'équation (1) se réduit alors à $y^2 = 0$ et représente le système de deux droites coïncidant avec l'axe des x et formant, par conséquent, une variété du genre parabole.

Pour déterminer maintenant le genre des solutions obtenues suivant la position du point P dans le plan, nous désignerons par x et y les coordonnées variables du point P, et nous comparerons l'expression

$$\frac{-ax + \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2 y^2}}{x^2}$$

à l'unité.

Posons

$$\frac{-ax + \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2 y^2}}{x^2} = 1,$$

nous en tirons successivement

$$\begin{aligned} (x^2 + ax) &= \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2 y^2}, \\ x^4 + 2ax^3 + a^2 x^2 &= x^4 - 2ax^3 + a^2 x^2 + x^2 y^2, \\ 4ax^3 &= x^2 y^2, \\ y^2 &= 4ax, \end{aligned}$$

résultat facile à prévoir.

(180)

En outre, tous les points intérieurs à la parabole $y^2 = 4ax$ ont des coordonnées satisfaisant à l'inégalité

$$y^2 - 4ax < 0;$$

et pour tout point extérieur on a

$$y^2 - 4ax > 0 \quad (*).$$

On en peut conclure que tout point donné P, intérieur à cette parabole, donnera deux ellipses, et tout point extérieur, deux hyperboles.

Note. — La même question a été résolue par M. Barbarin.