Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 135-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__135_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1181

(voir 2e série, t. XIV, p. 384);

PAR M. L. BARBARIN,
Élève de l'École Normale supérieure.

Démontrer que l'on a

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots,$$

pourvu que la série soit convergente.

(H. LAURENT.)

La convergence a lieu évidemment quand a, b, c,... sont, par exemple, des nombres positifs qui vont en croissant, d'ailleurs en suivant une loi quelconque. Cela posé, je puis écrire

$$(1) \qquad \frac{a}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1},$$

de même

$$\frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{b+1}.$$

Je multiplie par $\frac{1}{a+1}$ les deux membres de cette dernière égalité, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{b}{(a+1)(b+1)} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)};$$

j'ai, par conséquent,

$$\frac{c}{(b+1)(c+1)} = \frac{1}{b+1} - \frac{1}{(b+1)(c+1)}.$$

Je multiplie encore les deux membres par $\frac{1}{a+1}$ et j'obtiens

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &\quad = \frac{1}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite; en général

$$\begin{aligned} &\frac{l}{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)} \\ &\quad = \frac{1}{(a+1)\ldots(k+1)} - \frac{1}{(a+1)\ldots(k+1)(l+1)}. \end{aligned}$$

En ajoutant toutes ces égalités, membre à membre, on obtient, après réduction,

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(e+1)} + \ldots \\ &\quad + \frac{l}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)} \\ &\quad = 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)}; \end{aligned}$$

le quotient $\frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)}$ diminue de plus en plus, et tend vers la limite zéro, à mesure que les quantités $a, b, \ldots, l$ augmentent en nombre et en valeur; donc on a bien

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots.$$

Cas particuliers. — En donnant à $a, b, c, \ldots$ des valeurs particulières, on est conduit à des résultats remarquables dont je vais présenter quelques-uns.

Si l'on fait $a = b = c = \ldots = l$ dans la formule, il vient

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a}{(a+1)^3} + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \ldots.$$

On retrouve ainsi ce fait connu que, N étant un nombre positif, supérieur à 1, la somme des puissances successives à exposants entiers de l'inverse de ce nombre a pour limite l'inverse du nombre qui lui est inférieur d'une unité

$$\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^3 + \ldots.$$

Faisons maintenant

$$b = a+1, \quad c = b+1, \quad d = c+1, \ldots;$$

il vient alors la formule

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{(a+1)(a+2)} + \frac{a+2}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{a+n-1}{(a+1)\ldots(a+n)} + \ldots,$$

qui, pour $a = 0$, conduit à la série

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{n-1}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Faisons maintenant

$$b = a+2, \quad c = b+2, \quad d = c+2, \quad \ldots;$$

nous arrivons à la formule

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a+2}{(a+1)(a+3)} + \frac{a+4}{(a+1)(a+3)(a+5)} + \ldots$$

qui, pour $a = 0$, donne la série

$$1 = \frac{2}{1.3} + \frac{4}{1.3.5} + \frac{6}{1.3.5.7} + \ldots + \frac{2n}{1.4.5.7\ldots 2n+1} + \ldots,$$

et pour $a = 1$ la série

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \frac{7}{2.4.6.8} + \ldots + \frac{2n-1}{2.4.6\ldots 2n} + \ldots.$$

On connaît enfin que chaque loi d'accroissement relatif aux quantités $a, b, c, \ldots$ donne lieu à une série convergente ayant l'unité pour limite.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Portail, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Louis Goulin, élève en Mathématiques spéciales au lycée Corneille à Rouen (classe de M. Vincent); E. Kruschwicthz, à Berlin; H. Delaperche, élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Emmanuel P.; de Virieu, professeur à Lyon; Moret-Blanc.

Question 1183

(voir 2e série, t. XIV, p. 288),

PAR M. MORET-BLANC.

Vérifier que

$$\begin{aligned}\Sigma a^2 \Sigma a'^2 \Sigma a''^2 = & [a \Sigma a' a'' + a' \Sigma a a'']^2 \\ & + [b \Sigma a' a'' + b' \Sigma a a'']^2 \\ & + [c \Sigma a' a'' + c' \Sigma a a'']^2 \\ & + [\Sigma (bc' - cb') a'']^2,\end{aligned}$$

les neuf quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant assujetties à la seule condition

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Cette identité donne, par exemple, la décomposition suivante :

$$(2^2+3^2+4^2)(4^2+4^2+5^2)(1^2+2^2+3^2)=74^2+71^2+112^2+9^2.$$

(CATALAN).

Ordonnons par rapport à a'', b'', c'' :

$$a\Sigma a'a'' + a'\Sigma aa'' = 2aa'a'' + (ab' + ba')b'' + (ac' + ca')c'',$$
$$b\Sigma a'a'' + b'\Sigma aa'' = (ab' + ba')a'' + 2bb'b'' + (bc' + cb')c'',$$
$$c\Sigma a'a'' + c'\Sigma aa'' = (ac' + ca')a'' + (bc' + cb')b'' + 2cc'c'',$$
$$\Sigma(bc' - cb')a'' = (bc' - cb')a'' + (ca' - ac')b'' + (ab' - ba')c''.$$

Le coefficient de a''^2 dans le second membre sera

$$4a^2a'^2 + (ab' + ba')^2 + (ac' + ca')^2 + (bc' - cb')^2$$

ou, en ajoutant,

$$b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2bb'cc' - a^2a'^2,$$

quantité identiquement nulle, en vertu de la condition donnée,

$$\begin{aligned}&a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2 + a^2c'^2\\ &\quad + c^2a'^2 + b^2c'^2 + c^2b'^2 + [2aa'(aa' + bb' + cc') = 0]\\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).\end{aligned}$$

Ce sera aussi, à cause de la symétrie, le coefficient de b''^2 et celui de c''^2.

Le coefficient de $a''b''$ est

$$\begin{aligned}&4aa'(ab' + ba') + 4bb'(ab' + ba')\\ &\quad + 2(ca' + ac')(bc' + cb') + 2(ca' - ac')(bc' - cb')\\ &\qquad = 4(ab' + ba')(aa' + bb' + cc') = 0.\end{aligned}$$

Les coefficients de $b''c''$ et $c''a''$ sont pareillement

$$4(bc' + cb')(aa' + bb' + cc') = 0,$$
$$4(ca' + ac')(aa' + bb' + cc') = 0.$$

Donc le second membre se réduit à

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)=\Sigma a^2\Sigma a'^2\Sigma a''^2.$$

C. Q. F. D.

On a la décomposition indiquée en faisant

$$\begin{aligned} a&=2, & b&=3, & c&=4,\\ a'&=4, & b'&=4, & c'&=-5,\\ a''&=1, & b''&=2, & c''&=3. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier et Félix Legrom.

Question 1186

(voir 2e série, t. XIV, p. 480);

PAR M. G. DE BEAUSÉJOUR,
Élève au collége Stanislas.

Trouver le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères, doublement tangentes à une parabole donnée, de telle sorte que la corde des contacts intercepte sur l'axe de la parabole, à partir de son sommet, une longueur qui soit moyenne proportionnelle entre les segments que cet axe détermine sur la corde elle-même. (GAMBEY.)

Supposons la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet; l'équation d'une hyperbole équilatère doublement tangente à la parabole sera

$$(1)\qquad y^2-2px-\overline{(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\lambda)}^2=0.$$

La condition relative à la corde des contacts s'exprime facilement en fonction de l'angle α et du produit des ordonnées des points d'intersection de la corde des contacts et de la parabole.

L'équation qui détermine les ordonnées de ces deux points est

(2) $$y^2 - 2p\left(\frac{\lambda - y\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0;$$

donc

$$\frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha} = \frac{2p\lambda}{\cos\alpha\cos^2\alpha}\ (*),$$

d'où

(3) $$\lambda\cos\alpha = 2p.$$

On aura l'équation du lieu cherché en éliminant λ et α entre l'équation (3) et les deux dérivées de l'équation (1) de l'hyperbole. Ces dérivées sont

$$p + \cos\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda) = 0,$$
$$y - \sin\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda) = 0.$$

On en déduit

$$\tang\alpha = -\frac{y}{p} \quad \text{et} \quad (x+p)\cos\alpha = \lambda$$

et par suite

$$\cos^2\alpha = \frac{p^2}{y^2+p^2}, \qquad (x+p)\cos^2\alpha = \lambda\cos\alpha = 2p;$$

d'où

$$\frac{p^2}{y^2+p^2} = \frac{2p}{x+p} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{p}{2}(x-p).$$

(*) En désignant par y', y'' les racines de l'équation (2), le produit des segments que l'axe de la parabole détermine sur la corde des contacts a pour valeur absolue $-\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$ ou $+\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$, suivant que y' et y'' ont des signes différents ou le même signe; mais, dans ce dernier cas, la corde des contacts, prolongée extérieurement à la parabole, rencontre l'axe en un point dont la distance au sommet de la courbe ne peut être moyenne proportionnelle entre les deux segments de la corde; il s'ensuit qu'il faut prendre $-\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$ pour valeur du produit de ces deux segments. D'autre part, l'abscisse du point où la corde des contacts rencontre l'axe de la parabole est égale à $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$. On a donc

$$\frac{\lambda^2}{\cos\alpha^2} = -\frac{y'y''}{\cos^2\alpha} = \frac{2p\lambda}{\cos\alpha\cos^2\alpha}.$$

(G.)

Donc le lieu cherché est une parabole dont le paramètre est le quart de celui de la parabole donnée.

Note. — Autres solutions analytiques de la même question par MM. Pellissier; Moret-Blanc; Lez; Demartres; Sondat; E. Barisien; Joseph Chailan et Édouard Guillet, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins; Ch. Picard, élève au lycée de Grenoble (classe de M. Bernard); Leloutre et L. Portail, élèves en spéciales au lycée de Lille (classe de M. Walecki); P. Lebard et Chapsal, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes; Georges Rendu, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens; Goulin, élève au lycée Corneille à Rouen; Thévenin, élève au lycée Charlemagne.

Solution géométrique de la même question 1186

(voir p. 140);

PAR M. C. MOREAU.

Capitaine d'Artillerie.

Soient A le sommet et M un point quelconque de la parabole donnée (*); BC une corde parallèle à la tangente en M. Cette corde coupera l'axe en un point D, son milieu I et son pôle P seront sur le diamètre passant par le point M.

Cela posé, la corde BC satisfera à la condition de l'énoncé si l'on a

$$(1)\qquad \overline{BI}^2 = AD.MI.$$

En effet, en menant AE égale et parallèle à DI, la relation précédente entraîne, d'après une propriété fondamentale de la parabole,

$$AE^2 = AD.ME\ (^{**}),$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) L'équation de la parabole rapportée au diamètre MI et à la tangente en M est, comme on sait, $y^2 = 2p'x$, où $2p'$ représente le paramètre relatif au diamètre MI. Dans ce système d'axes, le point B a pour coordonnées les droites BI, MI; les coordonnées du point A sont $\pm$ AE et ME. De là $\overline{BI}^2 = 2p'$MI, et $\overline{AE}^2 = 2p'$ME. La première de ces deux équations, comparée à l'égalité (1) $\overline{BI}^2 = AD.MI$, donne $2p' = AD$, et d'où, en retranchant de l'égalité (1), et réduisant

$$BD.DC = AD^2.$$

Maintenant, le centre de l'hyperbole équilatère tangente en B et en C aux droites PB, PC se trouve sur la médiane PI du triangle PBC, en un point O déterminé par la relation

$$\overline{BI}^2 = IO.IP = 2IO.MI,$$

et il en résulte, par comparaison avec l'inégalité (1),

$$IO = \frac{AD}{2}.$$

Si alors on désigne par $2p$ le paramètre de la parabole donnée; par x', y' les coordonnées du point M, et par x, y celles du point O, on a d'abord, à cause de l'égalité (1)

$$AD = 2(p + 2x')$$

et ensuite

$$y = y', \quad x = \frac{AD}{2} + \frac{y'}{\left(\frac{p}{y'}\right)} = p + 4x'.$$

Il vient donc enfin pour l'équation du lieu cherché

$$y^2 = \frac{p}{2}(x - p),$$

---

par suite la seconde devient $\overline{AE}^2 = AD.ME$. On en déduit $BD.DC = AD^2$.

D'après cela, on voit que, pour qu'il soit possible de mener par un point D de l'axe de la parabole une corde BDC telle qu'on ait $BD.DC = \overline{AD}^2$, il faut que la distance AD du point D au sommet A soit au moins égale au paramètre $2p$ de la parabole. Si $AD = 2p$, la corde BDC sera perpendiculaire à l'axe, la question n'admettra qu'une seule solution. Si $AD > 2p$, on décrira du foyer comme centre, avec un rayon égal au quart de AD, un arc de cercle qui coupera la parabole en deux points M et M', symétriques par rapport à l'axe, et l'on mènera par le point D des cordes parallèles aux tangentes en M et M': chacune de ces cordes répondra à la question. (G.)

équation d'une parabole dont le sommet est à une distance égale à p de celui de la parabole donnée, qui a même axe qu'elle, et un paramètre quatre fois moindre.