

A. VACHETTE

**Permutations rectilignes de  $3q$  lettres  
égales 3 à 3, quand 3 lettres consécutives  
sont distinctes ; calcul de la formule  
générale ; applications**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 114-126

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_114\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__114_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE  $3q$  LETTRES ÉGALES 3 A 3,  
QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES ;  
CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE ; APPLICATIONS ;

PAR M. A. VACHETTE.

---

I. *Permutations bonnes et permutations mauvaises ; variétés d'une espèce, asymétriques, symétriques et réciproques.*

Soit  $C_{q,3}$  le nombre des permutations bonnes ; elles se trouvent parmi les  $B_{q,3}$  et sont formées aussi avec des  $T_{3(q-1)}$  ; en introduisant trois lettres égales dans celles de ces dernières qui y sont propices, elles ne peuvent venir ainsi que des  $B_{q-1,3}$ , puisque toute  $M_{q-1}(r, t)$  s'y trouve impropre, deux lettres distinctes étant nécessaires pour fermer le binaire  $\underline{aa}$ , ou le ternaire  $\underline{aaa}$ .

Toutes les autres espèces de permutations sont mauvaises, à cause de certaines séquences de lettres, dites *intervalles*.

$\underline{aba}$ ,  $\underline{abab}$ ,  $\underline{abaca}$ ,  $\underline{abacacdad}$ ,

où une lettre quelconque fait partie, comme *médiane* ou *extrême*, d'un intervalle ayant à chacune de ses extrémités la forme primordiale  $\underline{aba}$ , ce qui le rend indécomposable. Le nombre des permutations mauvaises

d'une certaine espèce sera désigné par  $N_q(\alpha)$ ,  $q$  indiquant l'ordre,  $\alpha$  servant d'indication pour le nombre et la nature des intervalles qui y figurent.

Toute  $N_{q,3}$  est une tournante complète à  $3q$  permutations : il y a cependant une exception ; dans les  $B_{2,3}$ , il n'y a point de  $C_{2,3}$ , et l'on ne connaît que l'espèce ab ab ab, tournante incomplète à deux permutations.

On a encore des *variétés asymétriques*, et des *variétés symétriques de fraction*  $\frac{1}{x}$ . Pour un nombre  $A$  de variétés asymétriques, on obtient, dans l'ordre  $q$ ,  $3q P_q \cdot A$  permutations ; pour un nombre  $A'$  de variétés asymétriques de fractions  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{3q P_q}{x} A'$ . Les  $x$  portions égales de la permutation qui font la symétrie commencent, en général, pour les  $N_{q,3}$ , à des intervalles, et chacune d'elles contient au moins un intervalle où le nombre des lettres est  $\geq 3$  ; comme il y a  $3q$  lettres, on doit avoir  $x \leq q$ , et, par suite,  $x$  est toujours un diviseur de  $P_q$ .

Deux variétés d'une même espèce sont *réciproques* quand l'une se déduit de l'autre, en la renversant bout pour bout. Elles sont, en général, différentes. Ainsi

$$\underline{aba} \text{ de } \underline{af} \text{ } \underline{bc} \text{ } \underline{bc} \text{ } \underline{efcd} \text{ } \underline{fecd}, \quad \underline{dcefdcfe} \text{ } \underline{cbcb} \text{ } \underline{faedaba}$$

sont deux variétés réciproques distinctes ; mais

$$\underline{aba} \text{ } \underline{cde} \text{ } \underline{cde} \text{ } \underline{cde} \text{ } \underline{bab} \text{ } \underline{fgh} \text{ } \underline{fgh} \text{ } \underline{fgh}$$

est à elle-même sa réciproque ; le fait a toujours lieu pour les variétés symétriques.

La réciprocité permet d'abrégier la recherche directe du nombre des permutations d'une espèce déterminée : quand deux variétés sont réciproques, on retrouve de droite à gauche dans la seconde ce qu'on avait trouvé de gauche à droite dans la première. Après avoir trouvé

toutes les variétés possibles dans un sens, on en doublera le nombre ; mais il faudra bien s'assurer si quelques-unes des variétés trouvées ne sont pas à elles-mêmes leurs réciproques, ce qu'on verra mieux sur les exemples.

## II. Des intervalles.

1° L'intervalle est simple ou composé, selon qu'il contient deux ou plus de deux lettres distinctes.

Il n'y a que quatre intervalles simples

$$\underline{aba}, \quad \underline{abab}, \quad \underline{ababab}, \quad \underline{abababab},$$

désignés respectivement par

$$s_3, \quad s_4, \quad s_5, \quad s_6.$$

Dans  $s_3$ ,  $\underline{aba}$ ,  $b$  est médiane et  $a$  extrême ; dans  $s_4$ ,  $\underline{abab}$ , il y a deux médianes et deux extrêmes ; dans  $s_5$ ,  $\underline{ababab}$ , deux médianes, deux extrêmes, et la lettre moyenne  $a$  ; dans  $s_6$ ,  $\underline{abababab}$ , deux extrêmes, deux médianes et deux lettres moyennes.

L'intervalle composé présente nécessairement des *suites tridifférentes* de trois lettres distinctes consécutives  $abc, cab, \dots$ , intérieures à l'intervalle, commençant au plutôt à la deuxième lettre, au plus tard à la troisième, à droite et à gauche :

$$\underline{abacacb}, \quad \underline{ababc bc}, \quad \underline{abacacd cd}, \quad \underline{ababc bca c},$$

la forme  $\underline{ababa}$  ne pouvant devenir plus complexe que par la juxtaposition de  $b$ . La suite tridifférente est de *second rang* ou de *troisième rang*, selon qu'elle commence à la deuxième ou à la troisième lettre de l'intervalle composé, qu'on peut nommer intervalle de *second* ou de *troisième rang*.

Quand il y a, dans l'intervalle, plusieurs *tridifférences* consécutives, les deux dernières lettres d'une suite sont par ordre les deux premières de la consécutive; ab abc . . . entraîne ab abc bc . . ., si l'on veut avoir un intervalle plus complexe, contenant plusieurs tridifférences.

2° L'intervalle est *réductible* ou *irréductible*, quand on peut ou non en détacher  $3r$  lettres égales trois à trois, sans altérer la forme du reste de la permutation. Ainsi

$$\underline{ab abc bcd cde de}$$

peut, en détachant trois  $c$  et trois  $d$ , se réduire à

$$\underline{ab abe be};$$

les lettres  $a e$  extrêmes demeurent toujours à la même distance de leurs semblables, situées en dehors de l'intervalle, et il n'y a pas lieu de se préoccuper de la lettre  $b$ , qui entre trois fois dans l'intervalle. Au contraire

$$\bullet \quad \underline{ab abc bc}$$

est irréductible; car, si l'on enlève les trois  $b$ , on obtient a a c c, qui ne se rencontre jamais dans les  $B_{g,3}$ . Il en est de même de a b a c a; car, si l'on enlève les  $a$ , on obtient b c qui peut se rattacher aux autres  $b$  et  $c$  que contient la permutation, pour déterminer des intervalles la distance entre les lettres pareilles,  $b$  et  $c$  ayant nécessairement changé.

La réduction d'un intervalle permet, en général, d'abaisser de  $r$  unités l'ordre d'une permutation, sans augmenter ni diminuer le nombre de ses intervalles, et sans changer le nombre des variétés de l'espèce considérée.

Les quatre intervalles simples sont irréductibles.

Il y a trois intervalles composés irréductibles; ils ne

contiennent qu'une seule tridifférence,

$$\underline{a\ bac\ a} \left\{ \begin{array}{l} \underline{a\ hac\ ac} \\ \underline{ca\ cab\ a} \end{array} \right\} \text{ formes réciproques } \underline{ab\ abc\ bc},$$

désignées respectivement par

$$p_5, \quad p_6, \quad p_7.$$

Dans le  $p_5$ , abaca, il y a deux extrêmes, une lettre moyenne et deux médianes  $b$  et  $c$ ; dans le  $p_6$ ,  $\left. \begin{array}{l} \underline{a\ hac\ ac} \\ \underline{ca\ cab\ a} \end{array} \right\}$ , une médiane  $b$ , une lettre double  $c$ , et une lettre triple  $a$ ; dans le  $p_7$ , ababc bc, deux extrêmes, deux médianes  $a$  et  $c$ , et une lettre triple  $b$  qui joue le rôle de moyenne et de médiane.

3° Plusieurs intervalles sont *complémentaires* quand ils contiennent exclusivement  $3r$  lettres égales trois à trois, aba et bab, abaca et bc bc, ababc b et cac donnent des exemples de deux intervalles complémentaires; ab a, bc b, ca c donnent un exemple de trois intervalles complémentaires.

### III. Classification des intervalles réductibles.

Ils se divisent en cinq classes ayant pour types les trois intervalles composés irréductibles  $p_5, p_6, p_7$  et deux des intervalles simples  $s_5, s_6$ .

1° Classe de type  $s_5$ .

Un intervalle de cette classe, désigné par  $t_{3,r-1}$ , contient  $3r - 1$  lettres, dont  $r$  distinctes;  $3(r - 1)$  lettres y sont égales trois à trois, et la dernière lettre distincte entre deux fois

$$\underline{a\ bac\ acd\ cdb\ d}.$$

Il se réduit à son type  $s_5$  ababa, en éliminant  $r - 2$  des  $r$  lettres distinctes prises parmi celles qui y entrent trois

fois ; la même lettre  $b$  commence et finit les tridifférences, et cette lettre, comme dans  $s_5$ , est médiane du  $t_{3r-1}$ .

2° Classe de type  $s_6$ .

Un intervalle de cette classe, désigné par  $t_{8r}$ , contient  $3r$  lettres égales trois à trois, et est susceptible de deux formes réciproques

$$\begin{array}{c} \underline{a\ bac\ acd\ cdb\ db}, \\ \underline{bd\ bdc\ dca\ cab\ a}. \end{array}$$

Il se réduit à son type  $s_6$ , ababab, en éliminant  $r - 2$  des  $r$  lettres distinctes ; la même lettre commence et finit les tridifférences, mais son type n'est susceptible que d'une seule forme, qui est elle-même sa réciproque.

Il peut à lui seul faire une permutation d'ordre  $q$ , si  $r = q$  ; l'espèce de la permutation est désignée alors par  $N_q(t_{5q})$ .

3° Classe de type  $p_5$ .

Un intervalle de cette classe, désigné par  $t'_{3r-1}$  contient  $3r - 1$  lettres, dont  $r + 1$  distinctes ;  $3(r - 1)$  lettres y sont égales trois à trois, et chacune des deux autres lettres distinctes n'entre qu'une fois

$$\underline{a\ bac\ acd\ cde\ d}.$$

Il se réduit à son type  $p_5$ , abaca, en éliminant  $r - 2$  des  $r + 1$  lettres distinctes, prises parmi les  $r + 1$  lettres qui y entrent trois fois ; les deux lettres simples  $b$ ,  $e$  (n'entrant qu'une fois) commencent et finissent les tridifférences ; elles seront, comme dans  $p_5$ , les médianes de  $t'_{3r-1}$ .

4° Classe de type  $p_6$ .

Un intervalle de cette classe, désigné par  $t'_{3r}$ , contient  $3r$  lettres, dont  $r + 1$  distinctes ;  $3(r - 1)$  lettres y sont égales trois à trois ; l'une des deux autres lettres

distinctes entre deux fois, et la dernière une fois ; il est, comme son type, susceptible de deux formes réciproques

$$\frac{a \text{ bac acd cde de,}}{\text{ed edc dca cab a,}}$$

il se réduit à son type  $p_6$ ,  $\frac{a \text{ bac ac}}{\text{ca cab a}}$ , en éliminant  $r - 2$

des  $r + 1$  lettres distinctes, prises parmi les  $r - 1$  lettres qui y entrent trois fois : les deux autres lettres distinctes  $b$ ,  $e$  commencent et finissent les tridifférences ;  $b$  sera, comme dans  $p_6$ , la médiane du  $t'_{3,r}$  ;  $e$  sera sa lettre double.

5° Classe de type  $p_7$ .

Un intervalle de cette classe, désigné par  $t_{3,r-2}$  contient  $3r - 2$  lettres, dont  $r$  distinctes ;  $3(r - 2)$  lettres y sont égales 3 à 3 et chacune des deux autres lettres distinctes entre deux fois

$$\frac{ab \text{ abc bcd cde de.}}$$

Il se réduit à son type  $p_7$ ,  $\frac{ab \text{ abc bc}}$ , en éliminant  $r - 3$  des  $r$  lettres distinctes, prises parmi les  $r - 2$  lettres qui y entrent trois fois ; les deux autres lettres distinctes  $a$ ,  $e$  commencent et finissent les tridifférences ; elles seront, comme dans  $p_5$ , les extrêmes et les médianes du  $t_{3,r-2}$ .

IV. *Évaluation directe des nombres de quelques espèces de permutations.*

1° Dans l'ordre 2, les  $B_{2,3}$  ne contiennent que l'espèce  $N_2 (s_6)$

$$\frac{ab \text{ ab ab,}}$$

et l'on voit que  $N_2 (s_6) = 2$ .

Il n'y a qu'une variété, et un seul intervalle compose toute la permutation. Cette variété est symétrique de



fraction  $\frac{1}{x}$ , et l'on a (I)

$$\frac{3q P_q}{x} \mathbf{I} = \mathbf{N}_2(s_6).$$

Comme  $\mathbf{N}_2(s_6) = 2$ ,  $q = 2$ , on en déduit

$$\frac{12}{x} = 2, \quad \text{d'où } x = 6,$$

et l'on considérera cette variété comme symétrique de fraction  $\frac{1}{6}$ .

2° Dans l'ordre  $q$ , l'espèce  $\mathbf{N}_q(t_{3q})$  ne contient qu'un intervalle  $t_{3q}$ , qui compose toute la permutation; il peut s'écrire sous la forme d'une suite de  $q$  tridifférences

$$\underline{abc \ bcd \ cde \ dea \ eab},$$

et l'on a une variété symétrique de fraction  $\frac{1}{q}$ ; donc

$$\frac{q}{3q P_q} \mathbf{N}_q(t_{3q}) = 1,$$

d'où

$$\mathbf{N}_q(t_{3q}) = 3P_q.$$

Pour  $q = 3$ ,

$$\mathbf{N}_3(t_9) = 3P_3.$$

3° Les espèces  $\mathbf{N}_q(t'_{3q-4}, s_4)$  et  $\mathbf{N}_q(t_{3q-4}, p_5)$  n'offrent chacune qu'une variété asymétrique; les deux intervalles, qui forment à eux deux la permutation, sont complémentaires,

$$\underline{a \ bac \ acd \ cde \ bebe}, \quad \underline{ab \ abc \ bcd \ cde \ de \ fafef}$$

On en conclut les deux formules

$$\mathbf{N}_q(t'_{3q-4}, s_4) = 3q P_q, \quad \mathbf{N}_q(t_{3q-4}, p_5) = 3q P_q.$$

En particulier, pour  $q = 3$ , on aura

$$\mathbf{N}_3(p_5, s_4) = 9P_3.$$

V. *Permutations d'ordre  $q-1$ , que peuvent former des  $C_{q,3}$ , quand on y introduit un nouveau groupe de trois lettres pareilles.*

1° On sait que les  $C_{q,3}$  ne peuvent venir que des  $B_{q-1,3}$ , mais non de toutes leurs espèces.

Toutes les  $C_{q-1,3}$  en fourniront.

Pour en fournir, une  $N_{q-1,3}$  ne doit pas contenir plus de trois intervalles, puisqu'il faut au moins une lettre  $h$  pour fermer un  $s_3$ , aba le plus simple des intervalles.

2° Toute  $N_{q-1,3}$  à un intervalle peut contenir un des sept intervalles irréductibles, et un seul intervalle de chacune des cinq classes d'intervalles irréductibles, celui qui ne présente que deux tridifférences; s'il en a trois, comme

$$\underline{a\ bac\ acb\ cdb\ db},$$

il ne peut être fermé complètement par trois lettres  $h$ .

On devra recourir aux douze espèces

$$N_{q-1}(s_3), \quad N_{q-1}(s_4), \quad N_{q-1}(s_5), \quad N_{q-1}(s_6),$$

$$N_{q-1}(p_3), \quad N_{q-1}(p_6), \quad N_{q-1}(p_7),$$

$$N_{q-1}(t_9), \quad N_{q-1}(t_8), \quad N_{q-1}(t'_8), \quad N_{q-1}(t'_9), \quad N_{q-1}(t_{10}).$$

Un  $s_3$  est fermé avec  $h$  de deux manières; aba donne

$$\underline{ab\ h\ a}, \quad \underline{a\ h\ ba}.$$

Un  $s_4$ , de deux manières avec un  $h$  ou deux  $h$ ; abab donne

$$\underline{ab\ h\ ab}, \quad \underline{a\ h\ ba\ h\ b}.$$

Un  $s_5$ , de deux manières avec deux  $h$ ; ababa donne

$$\underline{a\ h\ ba\ h\ ba}, \quad \underline{ab\ h\ ab\ h\ a}.$$

Un  $s_6$ , de deux manières avec deux  $h$  ou trois  $h$ ;  
 $ababab$  donne

$$ab \underline{h} ab \underline{h} ab, \quad a \underline{h} ba \underline{h} ba \underline{h} b;$$

la seconde manière est seule admissible, si la permutation ne contient que  $s_6$ .

Un  $p_8$ , de trois manières avec deux  $h$ ;  $abaca$  donne

$$a \underline{h} bac \underline{h} a, \quad a \underline{h} ba \underline{h} ca, \quad ab \underline{h} ac \underline{h} a.$$

Un  $p_6$  (quelle que soit sa forme), de deux manières avec deux  $h$  et d'une avec trois  $h$ ; ainsi  $abacac$  donne

$$a \underline{h} bac \underline{h} ac, \quad ab \underline{h} ac \underline{h} ac, \quad a \underline{h} ba \underline{h} ca \underline{h} c.$$

Un  $p_7$ , de trois manières, une avec deux  $h$  et deux avec trois  $h$ ;  $ababc bc$  donne

$$ab \underline{h} abc \underline{h} bc, \quad a \underline{h} ba \underline{h} bc \underline{h} bc, \quad ab \underline{h} ab \underline{h} cb \underline{h} c.$$

Un  $t_{10}$ , d'une manière avec trois  $h$ ;  $ababc bcd cd$  donne

$$ab \underline{h} abc \underline{h} bcd \underline{h} cd.$$

Un  $t_9$  ou un  $t'_9$  (quelle que soit sa forme), de deux manières avec trois  $h$ ;  $abacbc cb$  donne

$$a \underline{h} bac \underline{h} acb \underline{h} cb, \quad ab \underline{h} ac \underline{h} acb \underline{h} cb;$$

mais pour le  $t_9$  la première manière est seule admissible, s'il forme à lui seul la permutation.

Un  $t_8$  ou un  $t'_8$ , de quatre manières avec trois  $h$ ;  
 $abacbc c$  donne

$$a \underline{h} bac \underline{h} acb \underline{h} c, \quad a \underline{h} bac \underline{h} ac \underline{h} bc, \quad ab \underline{h} ac \underline{h} acb \underline{h} c, \\ ab \underline{h} ac \underline{h} ac \underline{h} bc.$$

3° Une  $N_{q-1,3}$ , à deux intervalles, doit contenir au

moins un  $s_3$  ou un  $s_4$ , les seuls qui puissent se fermer avec un  $h$ ; le second intervalle ne peut être que l'un des sept intervalles réductibles.

On devra recourir aux treize espèces suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{N}_{q-1}(2s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_4, s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_5, s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_6, s_3), \\ & \mathbb{N}_{q-1}(p_5, s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(p_6, s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(p_7, s_3), \\ & \mathbb{N}_{q-1}(2s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_5, s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_6, s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(p_5, s_4), \\ & \mathbb{N}_{q-1}(p_6, s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(p_7, s_4). \end{aligned}$$

4° Une  $\mathbb{N}_{q-1,3}$ , à trois intervalles, ne peut contenir que des  $s_3$  et des  $s_4$ .

On devra recourir aux quatre espèces suivantes :

$$\mathbb{N}_{q-1}(3s_3), \quad \mathbb{N}_{q-1}(2s_3, s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(s_3, 2s_4), \quad \mathbb{N}_{q-1}(3s_4).$$

Le nombre  $C_{q,3}$  sera la somme des parts qui lui sont fournies par les trente espèces de permutations que nous venons de distinguer et de désigner.

## VI. Part donnée par les $C_{q-1,3}$ .

Soit une  $C_{q-1,3}$  contenant  $3q - 3$  lettres égales trois à trois; si l'on y introduit les trois  $h$ , il y aura trois  $q$  places occupées, qu'on peut supposer numérotées de 1 à  $3q$ , et la permutation formée doit être une  $C_{q,3}$ .

Les plus forts numéros que puissent avoir simultanément les trois  $h$  sont  $3q$ ,  $3q - 3$  et  $3q - 6$ .

Pour le numéro 1 donné au premier  $h$ , le plus fort numéro du troisième  $h$  est  $3q - 2$ . Si l'on donne au deuxième  $h$  le numéro 4, le troisième peut avoir un des  $3q - 8$  numéros compris entre 7 et  $3q - 2$  inclusive-ment; si l'on donne au deuxième le numéro 5, le troisième peut en avoir  $3q - 9, \dots$ ; si l'on donne au deuxième le numéro  $3q - 5$ , le troisième ne peut en avoir que 1. Ainsi, pour le numéro 1 donné au premier  $h$ , le nombre

des systèmes de places occupées par les deux autres est

$$1 + 2 + 3 + \dots + (3q - 8) = \frac{(3q - 7)(3q - 8)}{2}.$$

Il en sera de même pour les numéros 2 et 3 attribués au premier  $h$ ; de sorte que, pour ces trois numéros donnés au premier  $h$ , on a un nombre de systèmes égal à

$$\frac{3(3q - 7)(3q - 8)}{2}.$$

Si le premier  $h$  a le numéro 4, chacun des deux autres prend un numéro de moins; il faut diminuer de 1 chacun des facteurs du numérateur de la fraction  $\frac{(3q - 7)(3q - 8)}{2}$ , et l'on a un nombre de systèmes égal à

$$\frac{(3q - 8)(3q - 9)}{2}.$$

S'il a le numéro 5, ce nombre est

$$\frac{(3q - 9)(3q - 10)}{2},$$

et ainsi de suite.

S'il a le numéro  $3q - 6$ , on en a 1 ou

$$\frac{2 \cdot 1}{2}.$$

Le nombre des systèmes fournis ainsi par une  $C_{q-1,3}$  aux  $C_{q,3}$  est la somme

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots \\ & + \frac{(3q - 9)(3q - 8)}{2} + \frac{3(q - 7)(3q - 8)}{2} \\ & = \frac{(3q - 9)(3q - 8)(3q - 7)}{6} + \frac{3(3q - 7)(3q - 8)}{2} \\ & = \frac{1}{2}q(3q - 7)(3q - 8), \end{aligned}$$

en s'appuyant sur la formule connue de la somme des nombres triangulaires

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

La part cherchée sera donc

$$\frac{1}{2}q(3q-7)(3q-8)C_{q-1,3}.$$

(*A suivre.*)