Nouvelles annales de mathématiques

I. Waille

Génération des lignes et des surfaces du second degré, d'après Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 5-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

GÉNÉRATION DES LIGNES ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, D'APRÈS JACOBI;

PAR M. I. WAILLE.

Lignes du second degré (*).

Deux bases fixes RS, *rs étant données, si l'on construit le triangle* rsM *dont les côtés* rM, sM *sont respectivement égaux à deux longueurs* Rm, Sm, *le lieu de* M *est une ellipse ou une hyperbole, quand l'aire du triangle* RSm *est nulle, c'est-à-dire quand* m *est un point quelconque de la ligne* RS; en effet, la somme ou la différence des longueurs rM, sM est alors constamment égale à RS.

Jacobi, qui a ainsi modifié la définition de l'ellipse et de l'hyperbole, fait remarquer que le lieu de M est une ligne du second degré, lorsque m décrit une droite quelconque. La méthode qu'il a donnée dans le cas où m se meut sur la seconde base rs, et où les deux bases sont situées de manière qu'on ait Rs = Sr, est fondée sur le théorème d'Ivory, et conduit à un mode de génération

(*) Voir le *Journal de Crelle*, 2e cahier, t. LXXIII. Un travail analogue de M. Hermès a paru dans le 3e cahier du même tome.

analogue des surfaces du second degré. Cette méthode est résumée dans ce qui suit.

L'équation d'une ellipse étant

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

on considère une seconde ellipse ayant les mêmes foyers F et F', et dont l'équation est

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}=1,$$

u étant moindre que b^2.

Un point R de la première courbe a pour coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, en supposant $\alpha^2+\beta^2=1$. Les coordonnées d'un point r de la deuxième sont $\alpha\sqrt{a^2-u}$, $\beta\sqrt{b^2-u}$; R et r sont appelés *points correspondants* (*).

En remplaçant α, β par α', β', on a deux autres points correspondants S, s, et, par suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}s^2-\mathrm{S}r^2 = &\ (a\alpha-\alpha'\sqrt{a^2-u})^2+(b\beta-\beta'\sqrt{b^2-u})^2\\ &-(a\alpha'-\alpha\sqrt{a^2-u})^2-(b\beta'-\beta\sqrt{b^2-u})^2\\ &= u(\alpha^2+\beta^2-\alpha'^2-\beta'^2)=0;\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{R}s=\mathrm{S}r.$$

C'est le théorème d'Ivory, démontré dans le cas de l'ellipse.

Cette propriété a lieu quelle que soit la valeur de $u<b^2$. Dans le cas limite où $u=b^2$, les ordonnées des points r, s sont nulles; leurs abscisses sont αc, $\alpha' c$, et, comme α^2 et α'^2 sont moindres que 1, ces points sont sur

(*) Ces deux points sont sur une hyperbole qui a les mêmes foyers que les ellipses (1) et (2), et dont l'équation $\frac{x^2}{\alpha^2c^2}-\frac{y^2}{\beta^2c^2}=1$ se déduit de (2) en y remplaçant u par $a^2-\alpha^2c^2=b^2+\beta^2c^2$.

le grand axe *entre* les deux foyers F et F'. Il en est de même pour tous les points de cet axe *correspondants* des points de l'ellipse.

On peut remarquer que, pour $u = b^2$, l'équation (2) donne $y = 0$ et $x^2 < c^2$, puisque la quantité indéterminée $\frac{y^2}{b^2 - u}$ est positive : elle représente ainsi l'*ellipse limite* FF'.

Si l'on suppose fixes les points R, S de l'ellipse donnée et les points correspondants r, s de l'axe des x, et si M est un point quelconque de la courbe correspondant à un point m de l'axe, comme on a

$$\mathrm{M}r = \mathrm{R}m \quad \text{et} \quad \mathrm{M}s = \mathrm{S}m,$$

M *est le point de rencontre de deux circonférences dont les centres sont r et s et les rayons* R*m et* S*m*.

Quand R et S sont les deux sommets A et A' du grand axe, r et s sont les foyers F et F'; donc $\mathrm{MF} = \mathrm{A}m$, $\mathrm{MF'} = \mathrm{A'}m$, et par suite $\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = \mathrm{AA'}$.

Les calculs relatifs à l'hyperbole se déduisent des précédents en changeant b^2 en $-b^2$, β^2 en $-\beta^2$, etc., et en supposant $u > -b^2$. Il en résulte la même propriété des points correspondants et la même construction d'un point de l'hyperbole, avec cette différence que les points r, s, m, etc., pour $u = -b^2$, sont sur la portion indéfinie de l'axe des x *extérieure* à FF'.

Dans le cas de la parabole, on démontre le théorème d'Ivory en observant que deux points correspondants de deux paraboles homofocales dirigées dans le même sens s'obtiennent en coupant les deux courbes par une troisième parabole ayant le même foyer et le même axe, mais dirigée en sens contraire. Le calcul se fait en prenant le foyer pour origine des coordonnées, et il en résulte l'égalité $\mathrm{R}s = \mathrm{S}r$.

Si l'on suppose nul le paramètre de la seconde parabole, elle se confond avec l'axe des x, dont chaque point au delà du foyer F est le correspondant d'un point de la parabole donnée, et l'on a ainsi, comme dans l'ellipse et l'hyperbole,

$$\mathrm{M}r = \mathrm{R}m, \quad \mathrm{M}s = \mathrm{S}m.$$

Ces propriétés des courbes du second degré se déduisent facilement de la méthode élémentaire qui sert à les construire.

A et A' étant les sommets de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, et r un point de cet axe, on sait que le point R de la courbe s'obtient par les conditions $\mathrm{RF} = \mathrm{A}r$, $\mathrm{RF}' = \mathrm{A}'r$. s étant un deuxième point de l'axe correspondant au point S, on a aussi

$$\mathrm{SF} = \mathrm{A}s, \quad \mathrm{SF}' = \mathrm{A}'s.$$

Or, si x' et x'' désignent les abscisses de R et de S, on a

$$\mathrm{RF} = \pm\left(a + \frac{cx'}{a}\right), \quad \mathrm{SF} = \pm\left(a + \frac{cx''}{a}\right);$$

donc, O étant le centre de la courbe,

$$\mathrm{O}r = \pm\frac{cx'}{a}, \quad \mathrm{O}s = \pm\frac{cx''}{a}.$$

De ces valeurs on déduit

$$\mathrm{R}s = \mathrm{S}r,$$

en tenant compte de l'équation de la courbe.

Dans la parabole, l'origine étant au sommet A, on a

$$\mathrm{RF} = \mathrm{A}r = x' + \frac{p}{2}, \quad \mathrm{SF} = \mathrm{A}s = x'' + \frac{p}{2},$$

d'où résulte aussi

$$\mathrm{R}s = \mathrm{S}r.$$

On a donc, dans les trois cas,

$$Mr = Rm, \quad Ms = Sm.$$

R′S′ étant la projection de RS sur la ligne rs, on a, d'après les abscisses des extrémités de ces droites :

1° Dans l'ellipse

$$rs < R'S';$$

2° Dans l'hyperbole

$$rs > R'S';$$

3° Dans la parabole

$$rs = R'S'.$$

On peut déterminer le centre et les quantités a, b, $2p$, au moyen des coordonnées des points R, S, r, s; on a d'ailleurs

$$RF - SF = rs \quad \text{ou} \quad RF + SF = rs,$$

d'où résulte une construction simple des foyers F et F′, un de ces points étant à l'infini quand $rs = R'S'$.

Les deux foyers se confondent, et l'on a deux droites concourantes : 1° quand $RS = rs$; 2° quand Rr et Ss font des angles égaux avec rs. Ils sont à l'infini, et l'on a deux droites parallèles quand $rs = RS = R'S'$. Enfin, si RS est perpendiculaire à rs en O, avec la condition $Or^2 - OR^2 = Os^2 - OS^2$, on a la droite ORS dont tous les points sont des foyers.

En prenant pour axe des x la ligne rs, et en désignant par x', y' les coordonnées de R, par x'', y'' celles de S et par x_1, x_2 les abscisses de r et de s, l'équation du lieu de M est

$$y^2 = (\lambda^2 - 1)(x - x')^2 - 2(\lambda + 1)(x' - x_1)(x - x') + y'^2 = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{x_1 - x^2}{x' - x''}.$$

La courbe est une ellipse quand $\lambda^2 < 1$, une hyperbole quand $\lambda^2 > 1$, et une parabole si $\lambda = 1$.

On a deux droites concourantes lorsque

$$(\lambda^2 - 1)y'^2 = (\lambda + 1)^2 (x' - x_1)^2,$$

d'où résulte, en supposant l'origine au point de rencontre de RS et de rs, l'égalité

$$(x' x_2 - x'' x_1)(x' x_2 + x'' x_1 - 2x' x'') = 0,$$

qui exprime les conditions géométriques indiquées.

L'équation représente deux droites parallèles quand $\lambda = 1$ avec $x' = x_1$, ou quand $\lambda = -1$; dans ce dernier cas,

$$\frac{x' + x_1}{2} = \frac{x'' + x_2}{2},$$

ce qu'on voit aussi par la Géométrie.

Enfin, pour $x' = x''$, λ est infini, et l'équation donne

$$(x - x')^2 = 0.$$

En résumé, deux longueurs RS, rs étant situées de manière que $Rs = Sr$, si l'on joint R et S à un point m de rs, le point M déterminé par les conditions $Mr = Rm$, $Ms = Sm$ est sur une ligne du second degré, et, si R'S' est la projection de RS sur la ligne rs, le lieu est :

1° Une ellipse quand $R'S' > rs$ (un cercle si $rs = 0$);

2° Une hyperbole lorsque $R'S' < rs$;

3° Une parabole si $R'S' = rs$;

4° Deux droites concourantes quand $RS = rs$, ou quand $\widehat{Rrs} = \widehat{Ssr}$;

5° Deux droites parallèles si $RS = rs = R'S'$;

6° Une droite quand RS est perpendiculaire à rs.

Surfaces du second degré.

Le changement que Jacobi a introduit dans la définition de l'ellipse et de l'hyperbole l'a conduit au théorème suivant :

Étant donnés deux triangles RST, *rst*, *si l'on construit sur ce dernier comme base une pyramide triangulaire rst*M, *dont les trois arêtes* rM, sM, tM *sont respectivement égales à trois longueurs* Rm, Sm, Tm, *le lieu de* M *est une surface du second degré, quand le volume de la pyramide* RSTm *est nul, c'est-à-dire quand m est dans le plan* RST.

Le lieu, comme le calcul le montre, est du second degré, lorsque m se meut dans un plan quelconque. Le théorème se démontre par une méthode analogue à celle qu'on a vue pour les lignes du second degré, dans le cas où m est dans le plan rst, et où les triangles RST, rst sont situés de manière qu'on ait

$$Rs = Sr, \quad Rt = Tr, \quad St = Ts.$$

Ellipsoïde. — L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

où l'on suppose $a^2 > b^2 > c^2$, on considère un second ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1, \tag{2}$$

où $u < c^2$. Ces deux ellipsoïdes sont homofocaux.

Un point R du premier a pour coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, en supposant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Les quantités

$\alpha\sqrt{a^2-u}$, $\beta\sqrt{b^2-u}$, $\gamma\sqrt{c^2-u}$ sont les coordonnées du point *correspondant* r de la seconde surface (*).

Si l'on remplace α, β, γ par α', β', γ', on a deux autres points correspondants S, s. On a, par suite,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}s^2 - \mathrm{S}r^2 = \; & (a\alpha - \alpha'\sqrt{a^2-u})^2 + (b\beta - \beta'\sqrt{b^2-u})^2 \\ & + (c\gamma - \gamma'\sqrt{c^2-u})^2 - (a\alpha' - \alpha\sqrt{a^2-u})^2 \\ & - (b\beta' - \beta\sqrt{b^2-u})^2 - (c\gamma' - \gamma\sqrt{c^2-u})^2 = 0; \end{aligned}$$

donc $\mathrm{R}s = \mathrm{S}r$. Le théorème d'Ivory est ainsi démontré.

Cette égalité a lieu quelle que soit la valeur de $u < c^2$. Pour le cas limite où $u = c^2$, l'équation (2) donne $z = 0$, et, à cause de l'indétermination de la quantité positive $\frac{z^2}{c^2-u}$, elle représente un *ellipsoïde limite* dont tous les points sont dans le plan des xy et intérieurs à la courbe qui a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1.$$

On voit d'ailleurs que l'x et l'y du point r qui, par l'hypothèse $u = c^2$, sont devenus $\alpha\sqrt{a^2-c^2}$, $\beta\sqrt{b^2-c^2}$, donnent, par leur substitution dans le premier membre de (3), la quantité $\alpha^2+\beta^2$ ou $1-\gamma^2$ qui est plus petite que le second membre. La même vérification se fera pour s. La courbe (3) est la *focale* de la surface dans le plan des xy : elle a les mêmes foyers que l'ellipse principale de

(*) On obtient l'equation d'un hyperboloïde à une nappe et celle d'un hyperboloïde à deux nappes, passant par R et r, en substituant successivement à u dans l'équation (2) les racines de l'équation

$$u^2 - u[a^2 + b^2 - \alpha^2(a^2-c^2) - \beta^2(b^2-c^2)] + a^2b^2 - \alpha^2 b^2(a^2-c^2) - \beta^2 a^2(b^2-c^2) = 0,$$

une des racines étant comprise entre b^2 et c^2, et l'autre entre a^2 et b^2.

ce plan

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soient T et M deux autres points de l'ellipsoïde donné, ayant pour correspondants dans le plan des xy les points t, m situés comme r et s dans l'intérieur de la courbe (3); on aura les égalités

$$\mathrm{R}t = \mathrm{T}r, \quad \mathrm{S}t = \mathrm{T}s, \quad \mathrm{M}r = \mathrm{R}m, \quad \mathrm{M}s = \mathrm{S}m, \quad \mathrm{M}t = \mathrm{T}m.$$

En supposant fixes les points R, S, T de la surface et leurs correspondants r, s, t, il résulte des trois dernières égalités qu'*un point quelconque* M *de l'ellipsoïde est l'intersection de trois sphères dont les centres sont* r, s, t *et dont les rayons sont les distances des points* R, S, T *à un point* m *pris dans l'intérieur de la focale.*

Lorsque les points R, S, T sont sur la section principale du plan des xy, r, s, t sont sur la focale. Les triangles rst, RST sont alors dans le même plan et inscrits dans les deux ellipses homofocales (3) et (4), de manière que leurs sommets soient respectivement des points correspondants des deux courbes. On peut de cette manière construire par points un ellipsoïde dont on connaît les trois axes.

Quand $b = a$, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, les coniques (3) et (4) sont des circonférences concentriques de rayons $\sqrt{a^2 - c^2}$ et a. Les coordonnées de R étant $a\alpha$, $a\beta$, et celles de r, $\alpha\sqrt{a^2 - c^2}$, $\beta\sqrt{a^2 - c^2}$, la ligne Rr passe par le centre; il en est de même des lignes Ss et Tt. Les triangles RST, rst, inscrits dans les deux courbes, ont leurs côtés parallèles.

Lorsque $b = c$, l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe. L'équation (3) donne alors $y = 0$; par suite, les points r, s, t, m, etc. sont sur l'axe des x, et les trois sphères se coupent suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

Les quantités $RS^2 - rs^2$, $RT^2 - rt^2$, $ST^2 - st^2$ sont positives ; de plus, dans le cas où R, S, T sont sur la courbe (4), on peut remplacer dans les expressions de ces quantités α et β par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, etc. On verra alors qu'une quelconque des longueurs $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$ est plus petite que la somme des deux autres, c'est-à-dire que ces trois lignes sont les côtés d'un triangle. Jac bi a établi cette propriété caractéristique de l'ellipsoïde par des considérations de Statique.

La méthode précédente appliquée aux autres surfaces à centre donne les résultats suivants :

Hyperboloïde à une nappe. — Un point M de cette surface peut être construit de deux manières :

1° R, S, T étant sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, r, s, t sont les points correspondants de l'*ellipse focale*

$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1,$$

et le point m correspondant à M est *extérieur* à la focale.

La surface est de révolution quand les deux coniques sont des circonférences de rayons a et $\sqrt{a^2 + c^2}$.

Les quantités $RS^2 - rs^2$, $RT^2 - rt^2$, $ST^2 - st^2$ sont négatives.

2° R, S, T étant trois points de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, r, s, t sont les points correspondants de l'*hyperbole focale* $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1$, et le point m correspondant à M est encore *extérieur* à la focale.

Quand $b = a$, la dernière équation donne

$$x = 0;$$

r, s, t, m, etc. sont alors sur l'axe des z, et les trois sphères se coupent suivant un parallèle de la surface de révolution.

Les expressions simplifiées des quantités $\sqrt{\text{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\text{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\text{ST}^2 - st^2}$ montrent que ces quantités sont imaginaires ou que deux sont réelles et la troisième imaginaire.

Hyperboloïde à deux nappes. — Trois points R, S, T de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, et les points correspondants r, s, t de l'*hyperbole focale* $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = -1$ déterminent le point M de la surface, le point correspondant m étant à l'*intérieur* de la focale (*).

Quand $b = a$, les points r, s, t, m sont sur l'axe des z, et la construction donne un parallèle de la surface de révolution.

Le calcul des quantités $\sqrt{\text{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\text{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\text{ST}^2 - st^2}$ fait voir que deux de ces quantités sont imaginaires, et la troisième réelle, ou bien qu'elles sont

---

(*) On peut construire le point M d'une autre manière. R, S, T, étant trois points de la surface à une distance $h > c$ du plan des xy, ont pour projections les points R', S', T' de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$. Soient r, s, t les points correspondants de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$; le point M est l'intersection de trois sphères ayant r, s, t pour centres, et dont les rayons sont les trois longueurs $\sqrt{h^2 + \text{R}'m^2}$, $\sqrt{h^2 + \text{S}'m^2}$, $\sqrt{h^2 + \text{T}'m^2}$, m étant un point quelconque du plan des xy.

Cette construction s'applique à l'ellipsoïde, à l'hyperboloïde à une nappe et au cône, en modifiant convenablement les seconds membres des équations des deux ellipses, et la situation du point m dans le plan des xy.

toutes les trois réelles, mais que la plus grande est supérieure à la somme des deux autres.

Cône. — Soit O le sommet; les deux points R, S étant sur la génératrice $y=0$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$, les points correspondants r, s sont sur la *ligne focale*

$$y=0,\quad \frac{x}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{z}{\sqrt{b^2+c^2}}=0,$$

de manière que $Or=OR$ et $Os=OS$; le troisième point T est sur la génératrice $y=0$, $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$, et le point t sur la *ligne focale* $y=0$, $\frac{x}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{z}{\sqrt{b^2+c^2}}=0$, à la distance $Ot=OT$; le point m qui correspond au point M de la surface est situé entre les deux lignes focales.

Quand $c=0$, le cône est de révolution, les deux lignes focales se confondent avec l'axe des z, et les points r, s, t, m sont sur cette droite.

Dans le cône $RS^2-rs^2=0$, RT^2-rt^2 et ST^2-st^2 sont des quantités positives ou négatives.

Cylindres. — La construction est analogue à celle du cône. R, S étant sur la génératrice $y=0$, $x=-a$, r, s sont sur la focale $y=0$, $x=-c$ et à la même distance du plan des xy; T est sur la droite $y=0$, $x=a$ et t, à la même hauteur, sur $y=0$, $x=c$.

Dans le cylindre elliptique, m est entre les deux *lignes focales* $x=\pm c$, et, dans le cylindre hyperbolique, il est dans la portion indéfinie du plan des xz, en dehors de ces deux droites.

D'après la position des points fixes, on a

$$RS^2-rs^2=0 \quad \text{et} \quad RT^2-rt^2=ST^2-st^2=\pm b^2.$$

Le cylindre parabolique $y^2 = 2px$ étant considéré comme la limite d'un cylindre elliptique, et les lignes ARS, Frs étant fixes, T et t s'éloignent indéfiniment, et la sphère décrite de t comme centre, avec Tm pour rayon, a pour limite un plan parallèle au plan tangent au sommet A, dont il est éloigné d'une quantité égale à l'abscisse de m diminuée de AF.

Paraboloïdes. — Pour démontrer le théorème d'Ivory dans le cas des paraboloïdes homofocaux, on met l'équation de ces surfaces sous la forme

$$(h) \qquad \frac{y^2}{h+l} + \frac{z^2}{h-l} = 2x + h,$$

en prenant pour origine le point milieu de la distance des foyers FF', et en posant

$$p - p' = 2l, \quad p + p' = 2h.$$

l est supposé positif, et, suivant les valeurs de h, on a des paraboloïdes elliptiques dirigés dans un sens ou dans l'autre, et des paraboloïdes hyperboliques.

Soit $h > l$; si l'on coupe le paraboloïde (h) par un paraboloïde dirigé en sens contraire, ayant pour équation

$$(\alpha) \qquad \frac{y^2}{\alpha - l} + \frac{z^2}{\alpha + l} = -2x + \alpha, \quad \text{où} \quad \alpha > l,$$

la projection de l'intersection sur le plan des xz a pour équation

$$\frac{y^2}{(h+l)(\alpha - l)} + \frac{z^2}{(h-l)(\alpha+l)} = 1;$$

donc x', y', z' désignant les coordonnées d'un point R commun aux deux surfaces, on peut poser

$$y'^2 = \mu(h+l)(\alpha - l), \quad z'^2 = \nu(h-l)(\alpha+l),$$

μ et ν étant positifs et remplissant la condition $\mu + \nu = 1$. On a, par suite,

$$x' = \frac{\alpha - h}{2} - \frac{l}{2}(2\mu - 1).$$

Si l'on remplace h par h', on a les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point r commun aux deux surfaces (h') et (α); on a ainsi

$$y_1^2 = \mu(h' + l)(\alpha - l), \quad z_1^2 = \nu(h' - l)(\alpha + l),$$

$$x_1 = \frac{\alpha - h'}{2} - \frac{l}{2}(2\mu - 1).$$

R et r sont deux points correspondants des deux paraboloïdes (h) et (h').

On a deux autres points correspondants S, s, en changeant α, μ, ν en α', μ', ν'.

Des coordonnées de ces points résulte l'égalité

$$\mathrm{R}s^2 - \mathrm{S}r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}s = \mathrm{S}r.$$

Si l'on fait $h' = l$, le second paraboloïde se confond avec la partie du plan des xy comprise dans l'*intérieur* de la courbe $\frac{y^2}{2l} = 2x + l$, qui est la *focale* du paraboloïde (h) dans le plan des xy. Les coordonnées de r deviennent

$$x_1 = \frac{\alpha}{2} - \mu l, \quad y_1 = \sqrt{2\mu l(\alpha - l)}, \quad z_1 = 0.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de la focale montre que r est *intérieur* à cette courbe : il en est de même de tous les points du plan des xy correspondants des points du paraboloïde (h).

R, S, T étant trois points fixes de la surface, et r, s, t les points correspondants du plan des xy, un point quelconque M est déterminé par les conditions

$$Mr = Rm, \quad Ms = Sm, \quad Mt = Tm,$$

m étant un point pris à l'intérieur de la focale.

Si R, S, T sont sur la parabole principale du plan des xy, r, s, t sont sur la focale, et les deux triangles sont inscrits dans ces deux coniques homofocales, de manière que leurs sommets soient des points correspondants : on peut ainsi construire un paraboloïde dont on connaît les paramètres $2p$ et $2p'$.

Le paraboloïde est de révolution si $l = 0$; la focale devient $y^2 = 0$, et les points r, s, t, m sont sur l'axe de la courbe.

Il est facile de vérifier que les quantités $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$ sont réelles et que la plus grande est égale à la somme des deux autres.

Les résultats relatifs au paraboloïde hyperbolique se déduisent des précédents en changeant ν en $-\nu$, et en supposant h compris entre $-l$ et $+l$. Les points du plan des xy correspondants des points de la surface sont extérieurs à la focale, dont les points r, s, t correspondent à trois points fixes de la parabole principale.

Les quantités $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$ sont imaginaires, et l'une d'entre elles est égale à la somme des deux autres.

D'après les considérations qui précèdent, on a ce théorème :

Deux triangles RST, *rst sont inscrits dans deux lignes du second degré homofocales, de manière que* $Rs = Sr$, $Rt = Tr$, $St = Ts$; *si l'on joint* R, S, T *à un point* m *du plan, le point d'intersection de trois sphères ayant* r, s, t *pour centres et* Rm, Sm, Tm *pour rayons est sur* *une surface du second degré* (*), *et si l'on forme les quantités* $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$, *le lieu est :*

1° *Un ellipsoïde, quand les trois quantités sont réelles et peuvent être les trois côtés d'un triangle ;*

2° *Un hyperboloïde à une nappe, lorsqu'elles sont imaginaires ou que deux sont réelles et la troisième imaginaire ;*

3° *Un hyperboloïde à deux nappes, si deux des quantités sont imaginaires et la troisième réelle, ou si, étant réelles toutes les trois, la plus grande est supérieure à la somme des deux autres ;*

4° *Un paraboloïde elliptique, si elles sont réelles et si l'une d'elles est égale à la somme des deux autres ;*

5° *Un paraboloïde hyperbolique, si elles sont imaginaires et si l'on a la même égalité ;*

6° *Un cône, quand l'une d'elles est nulle, les deux autres étant réelles ou imaginaires ;*

(*) On a une construction analogue quand les deux triangles ne sont pas dans le même plan ; dans ce cas, on peut avoir un système de deux plans.

Soient OA, OA′ les traces de deux plans donnés sur le plan des xy perpendiculaire à leur intersection, et $x'Ox$ la trace d'un plan bissecteur pris pour plan des xz. Un point R du système étant projeté en R′, on porte sur Ox' ou sur Ox, suivant la position du point, la longueur $Or' = OR'$, et l'on élève la perpendiculaire $r'r = R'R$; r est le point correspondant de R ; on aura de même s et t correspondants de S et de T. Au moyen des deux triangles ainsi obtenus, on pourra construire un point quelconque de l'un ou l'autre plan.

On aura un seul plan quand OA et OA′ se confondront avec la perpendiculaire à Ox.

Si les deux plans sont parallèles, on peut prendre pour point correspondant de R sa projection R′ sur le plan de symétrie. On peut aussi considérer un point quelconque r de ce dernier plan comme correspondant de R, et, pour avoir s et t, on joint les projections S′, T′ au point O milieu de $R'r$, et l'on prolonge des quantités $Os = OS'$ et $Ot = OT'$.

7° *Un cylindre, quand l'une d'elles est nulle et les deux autres égales ;*

8° *Une surface de révolution :* 1° *quand les deux coniques sont des circonférences concentriques, les triangles inscrits ayant leurs côtés parallèles ;* 2° *lorsque les trois points r, s, t sont sur l'axe de la ligne du second degré qui contient les points* R, S, T.