Nouvelles annales de mathématiques

Paul Terrier

Quadrilatères et sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 514-523

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__514_1>

QUADRILATÈRES ET SECTIONS CONIQUES (*);

PAR M. PAUL TERRIER,
Ingénieur à Paris.

Définition. — Nous appelons *axe radical d'un quadrilatère* l'axe radical commun aux circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètres.

THÉORÈME I. — *Les perpendiculaires abaissées de deux sommets opposés d'un quadrilatère complet sur les côtés non adjacents à ces sommets se coupent deux à deux en quatre points. On joint respectivement les intersections des perpendiculaires abaissées sur deux côtés aux intersections des deux autres côtés. On détermine ainsi quatre droites qui concourent sur l'axe radical du quadrilatère.*

THÉORÈME II. — *Si, de deux sommets opposés d'un quadrilatère complet, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés respectivement non adjacents à ces sommets, les quatre pieds, joints deux à deux de toutes les manières, donnent lieu à trois intersections situées l'une sur l'axe radical du quadrilatère donné, les deux autres sur chacune des deux diagonales qui ne passent pas par les deux sommets considérés.*

Chaque couple de sommets opposés donnant lieu à trois intersections, on obtient, par la considération suc-

(*) Les propriétés ci-après peuvent être étendues et généralisées par l'application des méthodes de transformation des figures.

cessive des trois couples, neuf points d'intersection ou *concours*, dont trois sur l'axe radical et deux sur chaque diagonale. Ces neuf *concours*, diversement groupés, donnent les résultats ci-après :

THÉORÈME III. — *Les deux* concours *fournis par deux diagonales du quadrilatère complet sur la troisième diagonale forment avec les extrémités de celle-ci un système harmonique.*

THÉORÈME IV. — *Les deux* concours *fournis par deux diagonales du quadrilatère sur la troisième, les deux extrémités de celle-ci et ses intersections avec les deux premières forment trois couples de points en involution.*

THÉORÈME V. — *Les perpendiculaires abaissées des deux extrémités d'une diagonale sur les côtés non concourants à ces extrémités se coupent deux à deux en quatre points. Ces quatre points, pris deux à deux, donnent six droites dont quatre passent par les extrémités de la diagonale considérée. Les deux autres passent par les* concours *que la même diagonale fournit sur chacune des deux autres.*

THÉORÈME VI. — *Les deux* concours *que deux diagonales d'un quadrilatère fournissent réciproquement l'une sur l'autre, et le* concours *que la troisième diagonale fournit sur l'axe radical du quadrilatère sont trois points situés sur un même* alignement *perpendiculaire à cette troisième diagonale.*

THÉORÈME VII. — *Les trois* alignements *que les diagonales d'un quadrilatère fournissent réciproquement les unes sur les autres, et ces trois diagonales elles-mêmes sont respectivement les côtés de deux triangles semblables et homologiques.*

THÉORÈME VIII. — *Les six côtés de ces deux triangles se coupent deux à deux en quinze points. Six de ces points sont les sommets mêmes des deux triangles, six autres sont sur une conique, les trois derniers sont sur une droite.*

THÉORÈME IX. — *Le centre d'homologie du triangle des* alignements *et du triangle diagonal est situé sur la circonférence circonscrite à ce dernier triangle.*

L'axe radical du quadrilatère est un diamètre de cette circonférence.

THÉORÈME X. — *Si, du milieu d'un des côtés d'un quadrilatère, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, et réciproquement :*

1° *Les deux perpendiculaires se coupent sur l'axe du quadrilatère ;*

2° *Le point d'intersection divise en deux parties égales le segment de cet axe limité aux points de rencontre des hauteurs des deux triangles formés par les deux côtés que l'on considère, successivement combinés avec chacun des deux autres côtés du quadrilatère.*

THÉORÈME XI. — *Les deux quadrilatères formés, le premier par les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, le second par les perpendiculaires abaissées du milieu de chaque côté sur son opposé sont égaux et symétriques par rapport au centre des moyennes distances du quadrilatère donné.*

THÉORÈME XII. — *Si l'on désigne par α, β, γ les trois* concours *respectivement fournis sur l'axe radical du quadrilatère par les trois diagonales, et par m, n, p, q les points de rencontre, sur le même axe radical, des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés trois* *à trois du quadrilatère, on a les trois relations*

$$\frac{\alpha m}{\alpha q} = \frac{\alpha n}{\alpha p}, \quad \frac{\beta m}{\beta p} = \frac{\beta n}{\beta q}, \quad \frac{\gamma m}{\gamma p} = \frac{\gamma q}{\gamma n};$$

d'où il suit que les perpendiculaires élevées sur l'axe radical ou ligne des hauteurs du quadrilatère donné par les points de concours α, β, γ *sont respectivement les axes radicaux des couples de circonférences qui ont pour diamètres* (mp, nq), (m, p, n, q), (mn, pq).

Les relations ci-dessus conduisent à quatre autres de la forme suivante :

$$\frac{nm \times np \times nq}{pn \times mq \times qp} = \frac{n\alpha \times n\beta \times n\gamma}{p\alpha \times m\beta \times q\gamma}.$$

THÉORÈME XIII. — *Le rapport harmonique déterminé par les* concours *sur la diagonale extérieure du quadrilatère est égal au rapport des diamètres des deux circonférences* nm, pq, *dont la corde commune passe au point de concours* γ *fourni par la diagonale extérieure sur l'axe radical.*

Le rapport harmonique sur l'une des diagonales intérieures est égal au rapport des diamètres des deux circonférences mq, np *dont la corde commune passe au point de concours* β *fourni par l'autre diagonale intérieure sur l'axe radical.*

Définition. — Nous appelons *centre perspectif* d'un quadrilatère inscrit le point symétrique du centre de la circonférence circonscrite par rapport au centre des moyennes distances du quadrilatère.

THÉORÈME XIV. — *Si, de chacun des sommets du quadrilatère inscrit au cercle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés non adjacents, et si l'on joint les couples des perpendiculaires issues de chaque sommet ;*

1° *Les quatre droites de jonction concourent sur l'axe radical du quadrilatère, en un point qui est le centre perspectif ;*

2° *Ces quatres droites sont égales.*

La première partie de ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Les tangentes aux sommets des quatre paraboles qui ont respectivement pour foyers les quatre sommets d'un quadrilatère inscrit au cercle, et pour tangentes les côtés des triangles formés par les trois autres sommets, concourent au centre perspectif du quadrilatère.

Théorème XV. — *Dans un quadrilatère inscrit au cercle :*

1° *Les deux* concours *fournis par les diagonales intérieures sur l'axe radical se confondent en un seul point, qui est le centre perspectif, et le troisième* concours, *fourni sur l'axe radical par la diagonale extérieure, passe à l'infini.*

2° *Les* concours *fournis par chacune des diagonales intérieures sur l'autre sont à l'infini, et les* concours *fournis par la diagonale extérieure sur chacune des deux intérieures sont respectivement aux points milieux de celles-ci.*

3° *Les perpendiculaires abaissées du milieu de chaque diagonale intérieure sur l'autre se coupent au centre perspectif.*

4° *Des trois* alignements *fournis par les neuf* concours *trois à trois, deux se coupent au centre perspectif, le troisième passant à l'infini.*

Théorème XVI. — *On a vu* (théorème VIII) *que l'axe radical de tout quadrilatère est un diamètre du cercle diagonal. Dans le cas du quadrilatère inscrit, les extrémités de ce diamètre sont, d'une part, l'intersec-*

tion des diagonales intérieures, d'autre part, le centre d'homologie du triangle diagonal et du triangle formé par les trois alignements *des points de concours.*

Ce dernier triangle, dans l'espèce, a un sommet au centre perspectif déterminé par deux côtés, respectivement perpendiculaires aux diagonales intérieures, et le troisième côté à l'infini.

Théorème XVII. — *Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés trois à trois d'un quadrilatère* inscriptible *sont symétriquement placés, sur l'axe radical, par rapport au centre perspectif.*

Théorème XVIII. — *Les six perpendiculaires réciproquement abaissées des milieux des côtés d'un quadrilatère inscrit sur leurs opposés et du milieu de chaque diagonale sur l'autre concourent au centre perspectif du quadrilatère.*

Définitions. — On appelle *droite de Simson* la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence circonscrite sur les trois côtés du triangle inscrit.

Nous appelons, par extension, *droites de Simson* d'un quadrilatère inscrit, les quatre droites de Simson fournies par chaque sommet et par le triangle des trois autres.

Nous appelons *hauteurs du quadrilatère* les quatre perpendiculaires abaissées du milieu de chaque côté sur son opposé.

Nous pouvons, dès lors, confondre dans l'énoncé suivant les deux propriétés précédentes :

Les quatre droites de Simson *et les quatre* hauteurs *d'un quadrilatère inscrit concourent au centre perspectif.*

Théorème XIX. — *Le centre perspectif d'un quadrilatère inscrit est un point tel que, si on le joint par des droites aux milieux des côtés et des diagonales, les angles formés par deux quelconques de ces droites, et par les côtés ou diagonales qui leur correspondent, sont égaux ou supplémentaires.*

Corollaires. — 1° Le centre perspectif d'un quadrilatère inscrit est le centre de l'hyperbole qui passe par les quatre sommets.

2° Les centres d'un cercle et d'une hyperbole équilatère, qui ont quatre points communs, sont symétriquement placés par rapport au centre des moyennes distances de ces quatre points.

Théorème XX. — *Les quatre* droites de Simson *d'un quadrilatère inscrit se coupent deux à deux au centre perspectif sous quatre angles ayant pour mesure les demi-différences des arcs sous-tendus par les cordes (côtés ou diagonales) qui joignent les sommets correspondants.*

Définition. — On appelle *quadrilatère des hauteurs* A_1 d'un quadrilatère inscrit donné A le quadrilatère qui a ses sommets aux points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par deux côtés et une diagonale de A.

On sait que ces deux quadrilatères sont égaux et symétriques.

Théorème XXI. — *Le centre de symétrie d'un quadrilatère* A *et de son quadrilatère des hauteurs* A_1 *est le centre perspectif commun à* A *et à* A_1.

Corollaires. — 1° Les droites de Simson, les hauteurs et les axes radicaux des deux quadrilatères se confondent deux à deux, quant à la direction.

2° Le centre perspectif est le centre d'*inscription* et le centre d'*homothétie* directe ou inverse de trois couples de quadrilatères semblables au proposé, savoir :

Le quadrilatère ayant pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets de A sur les diagonales, et le quadrilatère symétrique fourni par A_1.

Les deux quadrilatères ayant pour sommets les pieds quatre à quatre des huit perpendiculaires abaissées des sommets de A sur les côtés non concourants et les deux quadrilatères symétriques fournis par A_1.

Chacun de ces trois couples de quadrilatères a ses huit sommets distribués sur une circonférence ayant pour centre le centre perspectif du quadrilatère donné.

Théorème XXII. — *Quand un quadrilatère* A_1, *circonscrit à un cercle, a pour points de contact consécutifs les sommets consécutifs d'un quadrilatère inscrit* A; *quand un autre quadrilatère* A_2 *a pour côtés consécutifs les quatre droites qui déterminent, deux à deux, les deux points de concours fournis par les diagonales intérieures de* A *sur la diagonale extérieure :*

1° *Les quadrilatères* A_1, A_2 *sont en homothétie directe, et le centre d'homothétie est au point d'intersection de la diagonale extérieure commune et de la droite qui contient le centre d'inscription, le centre des moyennes distances et le centre perspectif de* A.

2° *Le centre perspectif est le centre de la circonférence inscrite dans* A_2.

3° *Le centre d'homothétie est le point central d'une involution formée par les trois couples de sommets extérieurs de* A_1 *et de* A_2.

4° *Les perpendiculaires abaissées du centre perspectif de* A *sur les côtés du même quadrilatère passent respectivement par les sommets de* A_2.

THÉORÈME XXIII. — *Si les diagonales intérieures du quadrilatère inscrit* A *se coupent à angle droit, toutes les autres conditions étant conformes au précédent énoncé :*

1° *Le centre perspectif et le point d'intersection des diagonales de* A *se confondent ;*

2° *Le rayon d'homothétie qui joint le centre d'inscription* O *et le centre perspectif* α *de* A *est perpendiculaire sur la direction commune aux diagonales extérieures des trois quadrilatères, et contient le point d'intersection* β *des diagonales de* A_2.

3° *Les quadrilatères* A_2, A_1, *circonscrits à deux cercles qui ont respectivement pour centres le centre perspectif et le point* O, *centre d'inscription de* A, *sont, de plus, inscrits dans deux autres cercles dont les centres sont respectivement, pour le premier au même point* O, *pour le second en un point* O_1 *situé sur le rayon d'homothétie* $O\alpha$.

4° *Les distances des points alignés* O, O_1, α *et* β *au centre d'homothétie* T *des deux systèmes sont liées par la relation*

$$\frac{T\alpha}{TO} = \sqrt[3]{\frac{T\beta}{TO_1}}.$$

5° *Les droites menées par le centre du cercle circonscrit au quadrilatère* A, *parallèlement à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, passent réciproquement par les points de concours de ces côtés.*

THÉORÈME XXIV. — *Dans le quadrilatère inscrit* A *à diagonales rectangulaires, les milieux des quatre côtés et les pieds des quatre hauteurs sont huit points situés sur une même circonférence. Le centre de cette circonférence est le milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre du cercle circonscrit.*

Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au quadrilatère A_2.

Cette propriété présente une grande analogie avec le théorème des neuf points, démontré par Euler, pour le cas du triangle. Les huit points désignés dans l'énoncé correspondent aux milieux des trois côtés et aux pieds des trois hauteurs dans le cas du triangle. Les trois autres points, dans ce même cas, sont les milieux des droites qui joignent les sommets du triangle au point de rencontre des hauteurs. Dans le quadrilatère, ces trois derniers points ont pour correspondants les milieux des quatre droites qui joignent le centre perspectif, ou point de rencontre des hauteurs de A, aux sommets de A_2. Mais ces quatre points se confondent avec les pieds des quatre hauteurs de A.

Théorème XXV. — *Le centre commun* O *des circonférences circonscrites aux quadrilatères* A *et* A_2 *et le centre perspectif* α *de* A *sont les foyers d'une ellipse qui a pour centre et pour grand axe le centre et le diamètre du cercle des douze points, pour tangentes les côtés du qudrilatère* A, *pour polaire focale la diagonale extérieure du même quadrilatère, et pour cercle directeur relatif au foyer* α *le cercle circonscrit au quadrilatère* A_2.