ÉDOUARD LUCAS

De quelques nouvelles formules de sommation

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 487-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__487_1>

DE QUELQUES NOUVELLES FORMULES DE SOMMATION;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Considérons la série de x quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_p,\ldots,\ u_x,$$

et formons une table de multiplication en écrivant successivement les uns au-dessous des autres les produits des termes de la série par ceux de la série

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ldots,\ v_p,\ldots,\ v_x;$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries que nous désignerons par U_x et V_x, ainsi qu'on le voit en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

D'autre part, en prenant seulement les p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{\text{ième}}$ ligne et les $p-1$ premiers de la $p^{\text{ième}}$ colonne, on a, pour expression de leur somme,

$$u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p,$$

et, par suite, en faisant la somme de ces expressions de $p = 1$ à $p = x$, on a la formule

$$(1)\qquad U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x} (u_p V_p + v_p U_p) + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0.$$

En supposant, par exemple,

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)}, \quad v_p = a^p,$$

on en déduit

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{a^p}{p(p+1)}[1+(a-1)p^2] = \frac{x}{x+1}a^{x+1},$$

et, en effectuant le quotient de $1+(a-1)p^2$ par $p(p+1)$, on a aussi

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{1-(a-1)^p}{p(p+1)} a^p = a - \frac{a^{x+1}}{x+1}.$$

En particulier, pour $a=2$ et $2a=1$, on a les formules

$$\frac{1}{2.3}2+\frac{2}{3.4}2^2+\frac{3}{4.5}2^3+\ldots+\frac{p}{(p+1)(p+2)}2^p = \frac{2^{p+1}}{p+2}-1,$$

$$\frac{3}{1.2}\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3.4}\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{p+2}{p(p+1)}\frac{1}{2^p} = 1-\frac{1}{(p+1)2^p}.$$

2. Considérons une troisième série de quantités

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_p, \ldots, w_x,$$

et plaçons les unes au-dessus des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table successivement par tous les termes de la troisième série. Nous formerons ainsi un cube, sorte de Table de multiplication à trois entrées, et le compartiment ayant pour coordonnées p, q, r contiendra le produit $u_p v_q w_r$.

Cela posé, considérons successivement les cubes ayant, à partir de l'origine 1, 2, 3,..., p unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au $(p-1)^{ième}$ cube pour obtenir le $p^{ième}$. Elle a pour expression

$$(u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p)(W_p - w_p) + w_p U_p V_p,$$

et, puisque la somme des termes de toute la table est égale au produit des sommes des trois séries, on a

$$(2)\left\{\begin{aligned} &U_x V_x W_x - \sum_{p=1}^{p=x} u_p V_p W_p - \sum_{p=1}^{p=x} v_p W_p U_p - \sum_{p=1}^{p=x} w_p U_p V_p \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p W_p + \sum_{p=1}^{p=x} v_p w_p U_p + \sum_{p=1}^{p=x} w_p u_p V_p \\ &\quad - \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p w_p = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où les trois séries sont identiques, on a

$$U_x^3 - 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^2 + 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p^3 = 0.$$

On a, de même, par une voie analogue, la formule générale

$$(3)\quad U_x^n - n_1\sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^{n-1} + n_2\sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p^{n-2} + \ldots + (-1)^n\sum_{p=1}^{p=x} u_p^n = 0,$$

dans laquelle $n_1, n_2, n_3, \ldots$ représentent les coefficients de la puissance n du binôme.

Si l'on fait, dans cette formule, $u_p = 1$, on obtient, en désignant par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres,

$$x^n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - \ldots \pm S_0.$$

3. Considérons les trois développements de

$$(x+1)^m, \quad (x+1)^m + (x-1)^m, \quad (x+1)^m - (x-1)^m,$$

remplaçons-y successivement x par 1, 2, 3,..., x, et ajoutons dans chaque cas les x égalités obtenues, nous trouvons les formules

$$(4)\begin{cases}(x+1)^m - 1 = m_1 S_{m-1} + m_2 S_{m-2} + \ldots + m_1 S_1 + S_0,\\ (x+1)^m - x^m - 1 = 2(m_2 S_{m-2} + m_4 S_{m-4} + \ldots),\\ (x+1)^m + x^m - 1 = 2(m_1 S_{m-1} + m_3 S_{m-3} + \ldots),\end{cases}$$

qui permettent de calculer S_m lorsque l'on connaît S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ...

La première de ces formules nous montre, à l'aide des valeurs de S_0 et de S_1, que S_m est toujours divisible par le produit $x(x+1)$. En retranchant $2x$ du premier membre de la seconde des formules (4), et $2S_0$ du second membre, on voit que le premier membre

$$f(x) = (x+1)^{2i} - x^{2i} - 2x - 1$$

s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$, si m est pair et égal à $2i$; donc S_{2i} est divisible par S_2. De même, en faisant passer dans le premier membre de la même formule le terme en S_1, dans le cas de m impair et égal à $2i+1$, on obtient

$$\varphi(x) = (x+1)^{2i+1} - x^{2i+1} - (2i+1)x(x+1) - 1,$$

et, puisque la dérivée de cette expression s'annule aussi pour $x = 0$ et $x = -1$, on en conclut que S_{2i+1} est divisible par S_1^2 ou S_3. On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés ou des cubes des m premiers nombres, suivant que m est pair ou impair* (*).

(*) Ce theorème, que nous completerons plus loin, se trouve énoncé par M. Prouhet dans la Note VI du *Cours d'Analyse* de Sturm, t. II, p. 375. *Voir* aussi le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, t. I, p. 352.

4 On a pour expression générale de S_m

$$
(5)\begin{cases}
(2i+1)S_{2i} = x^{2i+1} + \dfrac{2i+1}{2}x^{2i} + [2i+1]_2 B_1 x^{2i-1} + \ldots \\
\qquad - (-1)^r [2i+1]_{2r} B_r x^{2i-2r+1} - \ldots \\
\qquad - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i x, \\
(2i+2)S_{2i+1} = x^{2i+2} + \dfrac{2i+2}{2}x^{2i+1} + [2i+2]_2 B_1 x^{2i} + \ldots \\
\qquad - (-1)^r [2i+2]_{2r} B_r x^{2i-2r+2} - \ldots \\
\qquad - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i x^2,
\end{cases}
$$

et l'on a aussi

$$\frac{dS_{2i+1}}{dx} = (2i+1)S_{2i}, \quad \frac{dS_{2i}}{dx} = 2i\,S_{2i-1} - (-1)^i B_i.$$

Les facteurs numériques B_r sont connus sous le nom de *nombres de Bernoulli.* Au lieu de les déterminer, ainsi qu'on le fait habituellement, à l'aide des développements en séries, on peut opérer comme il suit. En remarquant que $S_m = 1$ pour $x = 1$ et que S_{2i} s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient les trois formules suivante :

$$
(6)\begin{cases}
i - \frac{1}{2} = [2i+1]_2 B_1 - [2i+1]_4 B_2 + \ldots - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i, \\
i = [2i+2]_2 B_1 - [2i+2]_4 B_2 + \ldots - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i, \\
2i = [2i+1]_2 2^2 B_1 - [2i+1]_4 2^4 B_2 + \ldots \\
\qquad - (-1)^i [2i+1]_{2i} 2^{2i} B_i.
\end{cases}
$$

La substitution de $x = 2$ dans les valeurs de S_{2i} et S_{2i+1} donne de même

$$\frac{2i+1}{2^{2i+1}} + \frac{2i-3}{4} = [2i+1]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+1]_4 \frac{B_2}{2^4} + \ldots - (-1)^i [2i+1]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}},$$

$$\frac{2i+2}{2^{2i+2}} + \frac{2i-2}{4} = [2i+2]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+2]_4 \frac{B_2}{2^4} + \ldots - (-1)^i [2i+2]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}}.$$

Et d'ailleurs, toutes ces formules se démontrent aisément par induction, en faisant voir : 1° que si, pour une valeur déterminée de x, elles sont vraies pour les sommes $S_m, S_{m-1}, \ldots$, elles sont vérifiées pour S_m ; 2° que si, pour toute valeur déterminée de m, elles sont vraies pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, x$ de x, elles sont encore vérifiées pour cette dernière valeur de x augmentée de l'unité.

5. En posant, dans la formule (1),

$$u_p = p^m, \quad v_p = p^n,$$

nous obtenons la formule suivante, dans laquelle il est important de tenir compte de la parité ou de l'imparité de m et de n,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} S_m S_n = &\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) S_{m+n+1} + \frac{m+n}{2} B_1 S_{m+n-1} \\ &- \frac{m_3 + n_3}{4} B_2 S_{m+n-3} + \frac{m_5 + n_5}{6} B_4 S_{m+n-5} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et, pour $m = n$,

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{2} S_m^2 = &S_{2m+1} + [m+1]_2 B_1 S_{2m-1} \\ &- [m+1]_4 B_2 S_{2m-3} + [m+1]_6 B_3 S_{2m-5} + \ldots, \end{aligned}$$

qui donne, comme cas particuliers (*),

$$\begin{aligned} S_1^2 &= S_3, \\ S_2^2 &= \tfrac{2}{3} S_5 + \tfrac{1}{3} S_3, \\ S_3^2 &= \tfrac{1}{2} S_7 + \tfrac{1}{2} S_5, \\ S_4^2 &= \tfrac{2}{5} S_9 + \tfrac{2}{3} S_7 - \tfrac{1}{15} S_5, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 49.

et inversement

$$
\begin{aligned}
2S_3 &= 2S_1^2,\\
2S_5 &= 3S_2^2 - S_1^2,\\
2S_7 &= 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2,\\
2S_9 &= 5S_4^2 - \tfrac{20}{3}S_3^2 + \tfrac{11}{2}S_2^2 - \tfrac{11}{6}S_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et il serait facile de trouver la loi générale des coefficients.

L'équation (7) fait voir : 1° en supposant m et n de même parité, que S_{2i+1} est algébriquement divisible par S_1^2, et que le quotient est une fonction entière de S_1 ; 2° en supposant m et n de parité différente, que S_{2i} est algébriquement divisible par S_2, et que le quotient est encore une fonction entière de S_1. Ces propriétés permettent de calculer facilement les sommes S. En désignant par q_{2i+1} et par q_{2i} les quotients de S_{2i+1} par S_1^2, et de S_{2i} par S_2, et faisant successivement $n=1$ et $n=2$ dans cette formule, nous obtenons, en posant $y = 2S_1 = x(x+1)$,

$$
\begin{aligned}
(i+1)y\,q_{2i+1} = {} & (i+2)q_{2i+3} + [2i+2]_2 B_1 q_{2i+1}\\
& - [2i+2]_4 B_2 q_{2i-1} + \ldots - (-1)^i[2i+2]_{2i} B_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{i+1}{2} y^2 q_{2i+1} = {} & \frac{2i+5}{3} q_{2i+4} + [2i+2]_2 B_1 q_{2i+2}\\
& - [2i+2]_4 B_2 q_{2i} + \ldots - (-1)^i[2i+2]_{2i} B_i.
\end{aligned}
$$

Ces deux formules donnent successivement, pour $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$, les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
q_3 &= 1,\\
q_5 &= \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3},\\
q_7 &= \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3},\\
q_9 &= \tfrac{2}{5}y^3 - \tfrac{3}{3}y^2 + \tfrac{6}{5}y - \tfrac{3}{5},\\
q_{11} &= \tfrac{1}{3}y^4 - \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{17}{6}y^2 - \tfrac{10}{3}y + \tfrac{5}{3},\\
q_{13} &= \tfrac{2}{7}y^5 - \tfrac{5}{3}y^4 + \tfrac{82}{15}y^3 - \tfrac{236}{21}y^2 + \tfrac{1382}{105}y - \tfrac{691}{105},\\
q_{15} &= \tfrac{1}{4}y^6 - \tfrac{6}{3}y^5 + \tfrac{28}{3}y^4 - \tfrac{88}{3}y^3 + \tfrac{359}{5}y^2 - 70y + 35,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
3q_2 &= 3,\\
5q_4 &= 3y - 1,\\
7q_6 &= 3y^2 - 3y + 1,\\
9q_8 &= 3y^3 - 6y^2 + \tfrac{27}{5}y - \tfrac{9}{5},\\
11q_{10} &= 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5,\\
13q_{12} &= 3y^5 - 15y^4 + 41y^3 - \tfrac{472}{7}y^2 + \tfrac{2073}{35}y - \tfrac{691}{35},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les coefficients des diverses puissances de y sont alternativement positifs et négatifs, comme cela résulte de la loi de sommation. On peut trouver aussi la loi des coefficients, en remarquant que pour $y = 2$ on a $q = 1$. On observera que q_{10} est divisible par $y - 1$.

A l'aide des formules (2) et (3), on peut encore exprimer $S_m S_n S_p$ et S_m^3 en fonction linéaire des sommes S, et généraliser ces résultats. On retrouverait ainsi, comme cas particuliers, les formules

$$
\begin{aligned}
4S_1^3 &= 3S_5 + S_3,\\
12S_2^3 &= 16S_6 - 5S_4 + S_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

qui seraient les deux premières d'une série de formules analogues qui ont été indiquées par M. Éd. Amigues (*).