NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Théorème pour la discussion d'un système de *n* équations du premier degré à *n* inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 481-487

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__481_0>

THÉORÈME POUR LA DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE n ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A n INCONNUES;

PAR M. G. FONTENÉ,

Maître répétiteur au lycee Saint-Louis.

Soit un système de n équations de premier degré à n inconnues :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_1 = {} & a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^f x_f + \ldots \\
& + a_1^p x_p + a_1^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& \qquad + a_1^r x_r + \ldots + a_1^n x_n - k_1 = 0,
\end{aligned}\right. \\
\multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
(\alpha) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_\alpha = {} & a_\alpha^1 x_1 + \ldots + a_\alpha^f x_f + \ldots \\
& + a_\alpha^p x_p + a_\alpha^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& \qquad + a_\alpha^r x_r + \ldots + a_\alpha^n x_n - k_\alpha = 0,
\end{aligned}\right. \\
\multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
(p) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_p = {} & a_p^1 x_1 + \ldots + a_p^f x_f + \ldots \\
& + a_p^p x_p + a_p^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& \qquad + a_p^r x_r + \ldots + a_p^n x_n - k_p = 0,
\end{aligned}\right. \\
(p+1) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_{p+1} = {} & a_{p+1}^1 x_1 + \ldots + a_{p+1}^f x_f + \ldots \\
& + a_{p+1}^p x_p + a_{p+1}^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& + a_{p+1}^n x_r + \ldots + a_{p+1}^n x_n - k_{p+1} = 0,
\end{aligned}\right. \\
\multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
(q) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_q = {} & a_q^1 x_1 + \ldots + a_q^f x_f + \ldots \\
& + a_q^p x_p + a_q^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& \qquad + a_q^r x_r + \ldots + a_q^n x_n - k_q = 0,
\end{aligned}\right. \\
\multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
(n) & \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_n = {} & a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^f x_f + \ldots \\
& + a_n^p x_p + a_n^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\
& \qquad + a_n^r x_r + \ldots + a_n^n x_n - k_n = 0.
\end{aligned}\right.
\end{array}
$$

Je suppose différent de zéro le déterminant mineur d'ordre p, obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes et les p premières lignes. Soit D ce déterminant.

Je désigne par $D_{\alpha,q}$ le déterminant mineur d'ordre p, obtenu en supprimant dans ce même déterminant des coefficients des inconnues :

1° Les p premières colonnes;

2° Les p premières lignes, excepté celle de rang α, et la ligne de rang q; α prend les p valeurs $1, 2, \ldots, p$; et à chacune de ces valeurs correspondent pour q les $(n-p)$ valeurs $(p+1), \ldots, n$.

Je multiplie les deux membres de l'équation (α) par D,
les deux membres de l'équation $(p+1)$ par $(-1)D_{\alpha,p+1}$,
. . . . ,
les deux membres de l'équation (q) par $(-1)^{q-p}D_{\alpha,q}$,
. . . . ,
les deux membres de l'équation (n) par $(-1)^{n-p}D_{\alpha,n}$,

et j'ajoute; j'ai l'équation

$$H_\alpha = DE_\alpha + (-1)D_{\alpha,p+1}E_{p+1} + \ldots + (-1)^{q-p}D_{\alpha,q}E_q + \ldots + (-1)^{n-p}D_{\alpha,n}E_n = 0.$$

Il est facile de voir que l'on peut remplacer le système donné par le système

$$\left|\begin{array}{l} H_1 = 0, \\ \ldots\ldots, \\ H_\alpha = 0, \\ \ldots\ldots, \\ H_p = 0, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} E_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_q = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_n = 0. \end{array}\right.$$

En effet, si, pour des valeurs des inconnues, les ystème primitif est vérifié, le système ci-dessus l'est pour les mêmes valeurs.

Réciproquement, si, pour des valeurs des inconnues, le système ci-dessus est vérifié, pour ces mêmes valeurs les $(n-p)$ dernières équations du système primitif sont vérifiées, et, parmi les p premières, l'équation $E_\alpha = 0$, par exemple, est vérifiée, puisque la relation $H_\alpha = 0$ se réduit pour ces valeurs à $DE_\alpha = 0$, ou $E_\alpha = 0$, D étant différent de zéro.

Je développe l'équation $H_\alpha = 0$.

Le coefficient de x_f est

$$a_\alpha^f D + (-1) a_{p+1}^f D_{\alpha, p+1} + \ldots + (-1)^{q-p} a_q^f D_{\alpha, q} + \ldots + (-1)^{n-p} a_n^f D_{\alpha, n},$$

ou le déterminant mineur d'ordre $p-1$

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^f & a_\alpha^{p+1} & a_\alpha^r & a_\alpha^n \\ a_{p+1}^f & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+1}^r & a_{p+1}^n \\ \ldots & . & \ldots & \ldots \\ a_q^f & a_q^{p+1} & a_q^r & a_q^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^f & a_n^{p+1} & a_n^r & a_n^n \end{vmatrix},$$

qu'on obtient en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes, à l'exception de celle de rang f, et les p premières lignes, à l'exception de celle de rang α. Je désignerai ce déterminant par Δ_α^f.

Le coefficient de x_r, qui se déduit du précédent en remplaçant f par r, est nul, puisque c'est un déterminant qui a deux colonnes identiques; le terme constant, changé de signe, se déduit du coefficient de x_f en remplaçant la première colonne par $k_\alpha, k_{p+1}, \ldots, k_q, \ldots, k_n$. Pour l'obtenir, on supprime dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes, que l'on remplace par une colonne unique $k_1, k_2, \ldots, k_n$, et dans le tableau obtenu on supprime les p premières lignes, à l'exception de celle de rang α. Je désignerai ce déterminant par K_α.

L'équation H_α est donc

$$\Delta_\alpha^1 x_1 + \ldots + \Delta_\alpha^f x_f + \ldots + \Delta_\alpha^p x_p - K_\alpha = 0.$$

Le second système, équivalent au premier, est donc

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_1^1 x_1 + \ldots + \Delta_1^f x_f + \ldots + \Delta_1 x_p - K_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_\alpha^1 x_1 + \ldots + \Delta_\alpha^f x_f + \ldots + \Delta_\alpha^p x_p - K_\alpha = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_p^1 x_1 + \ldots + \Delta_p^f x_f + \ldots + \Delta_p^p x_p - K_p = 0, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} E_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_q = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_n = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose nuls les p^2 déterminants Δ_α^f, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un système de n équations du premier degré à n inconnues, si le déterminant mineur* D *d'ordre p, obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes et les p premières lignes, est différent de zéro, et si, en outre, les* p^2 *déterminants mineurs* Δ_α^f *d'ordre* $(p-1)$, *obtenus en supprimant de toutes les façons possibles les p premières colonnes sauf une, et les p pre-*

mières lignes sauf une, sont tous nuls; deux cas sont à distinguer :

Ou les p déterminants K_α. *obtenus en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes pour les remplacer par une colonne formée des termes constants, et dans le tableau obtenu les p premières lignes, sauf une, ne sont pas tous nuls; les équations proposées n'ont pas de solution en nombres finis.*

Ou ces p déterminants sont nuls; le système est réductible aux $(n-p)$ *dernières équations; et, si, donnant aux p premières inconnues des valeurs arbitraires, on considère ces* $(n-p)$ *équations comme équations entre les* $(n-p)$ *dernières inconnues, le déterminant* D *des coefficients de ces inconnues étant différent de zéro; il y a une solution et une seule.* (Je suppose traité le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro.)

Remarque. — Dans le cas des équations homogènes, le système admet toujours, *a priori*, la solution

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

le cas d'impossibilité ne peut donc se présenter (et, en effet, les déterminants K sont tous nuls), et il y a réduction à $(n-p)$ équations.

On conclut de là la remarque suivante, qui constitue une propriété des déterminants et montre clairement l'accord entre le théorème précédent et la discussion connue d'un système de n équations du premier degré à n inconnues :

Quand le déterminant D *est différent de zéro, et que les* p^2 *déterminants mineurs* Δ_α^f *sont nuls, il arrive que le déterminant des coefficients des inconnues, et tous* *les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre* $(p-1)$ *inclusivement sont nuls.*

En effet, considérons le système d'équations homogènes obtenu en supprimant les termes constants dans les équations données; le déterminant D étant différent de zéro, et les p^2 déterminants Δ_α^f étant nuls, les équations se réduisent à $(n-p)$, et l'on peut se donner p inconnues. Or, si le déterminant des coefficients des inconnues, et tous les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre $(p-1)$ inclusivement n'étaient pas nuls, supposons que le premier différent de zéro fût d'ordre $p' < p$; les p'^2 déterminants $\Delta_{\alpha'}^f$ étant nuls, le système se réduirait à $(n-p')$ équations, et l'on ne pourrait se donner que p' des inconnues.

Le théorème qui vient d'être démontré donne la discussion complète d'un système de n équations du premier degré à n inconnues :

1° Le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro : une solution, une seule.

2° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul; un des déterminants mineurs du premier ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant la première ligne et la première colonne; deux cas :

Ou le déterminant K_1 n'est pas nul : impossibilité;

Ou le déterminant K_1 est nul : les n équations se réduisent aux $(n-1)$ dernières; on peut se donner x_1 arbitrairement, et alors on a, pour les $(n-1)$ autres inconnues, un système unique de valeurs.

3° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul, et aussi tous les déterminants mineurs du premier ordre; un des déterminants mineurs du second ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes; deux cas :

Ou les déterminants K'_1, K'_2 ne sont pas nuls tous deux : impossibilité ;

Ou ces deux déterminants sont nuls : les n équations se réduisent aux $(n-2)$ dernières; on peut se donner x_1 et x_2 arbitrairement, et alors on a, pour les $(n-2)$ autres inconnues, un système unique de valeurs. Etc., etc.