Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 464-474
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__464_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1171

(voir 2^e série, t. XIV, p. 240);

PAR M. L. MICHEL, au Puy.

Soient M, A, B *trois points d'une circonférence; trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en* A, B *aux droites* MA, MB, *lorsque le point* M *se déplace sur la circonférence.*

(LAISANT.)

Quand le point M se déplace sur la circonférence, l'angle en M reste constant. Or, on sait que l'angle de deux tangentes à la parabole est égal à la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la corde de contact. Si donc on désigne par F un point du lieu, l'angle AFB est constant; le lieu est par suite une circonférence de cercle facile à déterminer.

Note. — La même question a été resolue par MM. Moret-Blanc; G. Vandame; A. Bertrand; Gambey; Lez; Goulin et Nivelle, élèves du lycée de Rouen; P. S., de Cherbourg; A. Durel, répetiteur au lycée du Havre; F. Pitois, élève du collége d'Annecy; Chadu; Gondelon, élève du lycée de Moulins; Tourrettes; A. Pellissier; L. Arriu; Launoy, à Lille; Chabanel, à Reims.

Question 1172

(voir 2e série, t. XIV, p. 240),

PAR M. H. LEZ.

Soient a, b, c *les côtés ;* S *la surface d'un triangle* ABC; R *le rayon du cercle circonscrit à ce triangle,* $2p'$ *le périmètre du triangle de périmètre minimum inscrit dans* ABC :

1° *Construire le triangle* ABC, *connaissant* $2p'$ *et les angles* A, B, C;

2° *Démontrer la formule* $S = p'R$.

(C. CHADU.)

Pour construire un triangle ABC, connaissant les angles A, B, C et le périmètre $2p'$ du triangle inscrit de périmètre minimum, c'est-à-dire le triangle PMN obtenu en joignant les pieds des hauteurs du triangle primitif, il suffit de remarquer : 1° que les angles au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sont doubles des angles aux sommets; 2° que les côtés PN, PM, MN sont respectivement perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC passant par les sommets opposés; 3° que les angles P, N, M sont les suppléments des angles 2C, 2B, 2A ; 4° que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles M, N, P.

Construisant donc un triangle PNM dont on connaît les angles et le périmètre $2p'$, les perpendiculaires à ses bissectrices détermineront le triangle ABC.

Quant à l'aire du triangle ABC, il est facile de voir qu'elle égale $p'R$; car, si l'on joint le centre O du cercle circonscrit aux sommets du triangle PMN, la figure se trouve décomposée en trois parties ayant chacune pour surface la moitié d'un côté du triangle MNP multiplié par le rayon R. On peut trouver la valeur de p' en observant que $S = pr = p'R$, d'où

$$p' = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$
$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4abc}$$
$$= \frac{4S^2}{abc} = \frac{ah_a^2}{bc} = h_a \sin A.$$

Il est facile, d'après ce qui précède, de résoudre les questions posées par M. Gambey (même tome, page 328), et relatives à l'énoncé de M. Chadu (*).

1° Pour construire le triangle ABC, connaissant ses angles et le rayon r' du cercle inscrit au triangle PMN, il suffit de construire d'abord le triangle PMN dont les angles sont les suppléments de 2C, 2B, 2A et dont le rayon r' du cercle inscrit est donné : c'est un problème connu. Les perpendiculaires aux bissectrices intérieures détermineront les côtés du triangle ABC.

2° Si, au lieu de cela, on connaît les angles et la surface du triangle PMN, on construira d'abord ce triangle, ce qui est simple, puisqu'il n'y a qu'à trouver un triangle semblable à un triangle donné et d'une aire déterminée. Le reste de la construction comme dans le cas précédent.

3° Quant aux formules

$$S = \frac{h\,h'\,h''}{2p'} = 2R'r' \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

elles découlent des transformations suivantes :

Puisque

$$p' = h \sin A, \quad p' = h' \sin B, \quad p' = h'' \sin C,$$

(*) M. P. Sondat nous a envoyé une solution analogue de ces mêmes questions.

on peut écrire

$$p'^{3} = hh'h'' \sin A \sin B \sin C = \frac{p'^{2}S}{R}.$$

Or

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{8[p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2c^2} = \frac{pr}{2R^2},$$

car

$$pr = [p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$2R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{8p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où

$$\frac{hh'h''Rpr}{2R^2p'^2} = S;$$

mais $pr = p'R$; alors

$$S = \frac{hh'h''}{2p'}.$$

De même, en remarquant que les côtés du triangle MNP sont représentés par

$$m = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}, \quad n = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac},$$

$$q = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab},$$

et que $m+n+q = 2p'$, on a, en réduisant,

$$r'R' = \frac{mnq}{4p'};$$

mais

$$\tang A \tang B \tang C = \frac{64Sp(p-a)(p-b)(p-c)}{8mnp\,abc},$$

d'où

$$2r'R' \tang A \tang B \tang C = \frac{4Sp(p-a)(p-b)(p-c)}{p'abc} = S,$$

car

$$\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = p'.$$

Note. — La même question a ete resolue par MM. P. S., de Cherbourg, E. Gatti, etudiant a l'Universite de Turin; Michel, au Puy; F. Stordeur, de Lille; E. Rebuffel, eleve du lycee de Rennes; Tourrettes; F. Pitois, eleve du college d'Annecy; Gondelon, eleve du lycee de Moulins; E. Dupont, eleve du lycee du Havre; A. Durel et E. Vasselin.

Question 1173

(voir 2e série, t XIV, p 288),

PAR M. L. MICHEL, au Puy.

Lorsque les médianes d'un triangle inscrit dans une ellipse se coupent au centre de la courbe, le lieu du point de concours des hauteurs de ce triangle est une ellipse tangente à la développée.

(POUJADE.)

Les médianes du triangle étant des diamètres, les côtés sont respectivement parallèles aux tangentes aux trois sommets, et, par suite, les trois hauteurs du triangle sont des normales à l'ellipse.

Cela posé, soit (α, β) un point du lieu. Si l'on forme l'équation connue du quatrième degré, qui a pour racines les abscisses des pieds des normales menées du point (α, β) à l'ellipse, on trouve que

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = \frac{2a^2\alpha}{c^2}.$$

D'ailleurs $x' + x'' + x''' = 0$, puisque l'origine est le centre des moyennes distances des pieds de trois des normales. En remplaçant x par $\frac{2a^2\alpha}{c^2}$ dans l'équation en x, on a, entre α et β, une relation qui est l'équation du lieu. On trouve ainsi aisément, en remplaçant d'ailleurs α et β par x et y,

$$4a^2x^2 + 4b^2y^2 = c^4,$$

équation d'une ellipse rapportée à ses axes. Elle peut s'écrire

$$(1) \qquad \left(\frac{ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Il est facile de s'assurer que cette courbe est tangente à la développée de l'ellipse. On peut le mettre nettement en évidence de la façon suivante :

L'équation de la développée est

$$(2) \qquad \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Je remarque que, si z et u sont liés par la relation $z + u = 1$, il en résulte

$$z^3 + u^3 - \tfrac{1}{4} + 3zu = \tfrac{3}{4}$$

ou

$$z^3 + u^3 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}(z-u)^2 = 0.$$

D'après cela, l'équation (2) de la développée peut s'écrire

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left[\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 = 0,$$

ce qui montre clairement que l'ellipse (1) lui est tangente en ses points d'intersection avec les droites définies par l'équation

$$(ax)^2 - (by)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{a}{b} x.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Gondelon, élève du lycée de Moulins; Moret-Blanc; Launoy, à Lille; Chadu; Tourrettes; Chabanel, à Reims; P. Sondat, professeur au collége d'Annecy; P. S., de Cherbourg; Gambey; A. Astor, à Angoulême; Vladimir Habbé, à Odessa.

Question 1174

(voir 2e série, t. XIV, p. 288);

PAR M. F. STORDEUR,

Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Trouver, dans l'intérieur d'un triangle ABC, *un point* O *qui soit tel que, si de ce point on abaisse des perpendiculaires* OA', OB', OC', *sur les côtés* BC, AC, AB *de ce triangle, l'aire du triangle* A' B' C' *soit un maximum.*

(HARKEMA).

Je prends pour origine des coordonnées le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et pour axes deux droites rectangulaires quelconques passant par ce point. Soient alors

$$\lambda = x\cos\alpha + y\sin\alpha - u = 0,$$
$$\mu = x\cos\beta + y\sin\beta - v = 0,$$
$$\nu = x\cos\gamma + y\sin\gamma - w = 0$$

les équations respectives des côtés BC, AC et AB du triangle.

Si, d'un point O du plan dont les coordonnées sont x et y, on abaisse les perpendiculaires OA', OB', OC' sur les droites précédentes, la surface S du triangle A' B' C' est fournie par l'égalité

$$(1) \qquad \mu\nu\sin A + \nu\lambda\sin B + \lambda\mu\sin C = 2S.$$

Et si, dans cette relation, on considère x et y, qui y entrent implicitement, comme coordonnées courantes, on a l'équation du lieu du point (x, y). Ce lieu est un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées, car son équation ne diffère que par une constante 2S de celle du cercle circonscrit au triangle ABC

$$\mu\nu\sin A + \nu\lambda\sin B + \lambda\mu\sin C = 0.$$

En remplaçant dans l'équation (1) λ, μ et ν par leurs valeurs exprimées en fonction de x et de y, on trouve que, pour que le cercle lieu du point (x, y) soit réel, il faut que la quantité

$$vw \sin A + wu \sin B + uv \sin C - 2S$$

soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$2S \leq vw \sin A + wu \sin B + uv \sin C.$$

Le maximum de S a donc lieu lorsque cette inégalité se change en égalité.

Dans ce cas, le lieu du point (x, y) se réduit à un cercle de rayon nul, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées. Ainsi le point cherché est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et la surface maximum est le quart de celle de ce triangle.

Il faut remarquer que, si le triangle donné a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur; l'énoncé de la question suppose donc que le triangle ABC a tous ses angles aigus.

Toutefois, le maximum de S ainsi déterminé est un maximum relatif; car, eu égard seulement aux valeurs absolues, S peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut pour une position du point O convenablement choisie à l'extérieur du triangle.

Quand le point O est à l'origine des coordonnées, S est maximum; si le point décrit, autour de l'origine, un cercle de rayon croissant, S décroît jusqu'à la valeur zéro qu'elle atteint lorsque le point O est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Enfin, si le rayon du cercle croît indéfiniment, la surface S, devenue négative, décroît indéfiniment et sa valeur absolue croît au delà de toute limite.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Michel, au Puy; P. S., à Cherbourg; Gambey; Tourrettes; Maleyx; Chadu; P. Sondat; Lez; Genty; Moret-Blanc.

Questions 1178 *et* 1179

(voir 2e série, t. XIV, p. 336);

PAR M. P. SONDAT,

Professeur au collége d'Annecy.

1178. *Soient* P *un point pris sur l'axe d'une conique à centre, et* MN *une tangente quelconque, limitée aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe : démontrer que la puissance du point* P, *par rapport à la circonférence de diamètre* MN, *est constante.* (LAISANT.)

On sait que la droite MN est vue de chacun des foyers F et F′ sous un angle droit, ce qu'il est d'ailleurs facile de démontrer; la circonférence de diamètre MN passe donc aux foyers, et la puissance du point P, représentée par le produit

$$PF \times PF',$$

est évidemment constante.

1179. *Soient* MN *une tangente quelconque à une parabole, limitée en* M *à la tangente au sommet, et en* N *à une perpendiculaire fixe quelconque, élevée sur l'axe de la courbe ;* P *un point fixe quelconque pris sur cet axe : démontrer que la puissance du point* M, *par rapport à la circonférence de diamètre* MP, *est constante.*

(LAISANT.)

Soit

$$y = mx + \frac{p}{2m} \tag{1}$$

une tangente quelconque à la parabole

$$y^2 = 2px; \tag{2}$$

elle rencontre la tangente au sommet A et la perpendiculaire fixe, menée à l'axe à une distance $AB = b$ de ce sommet, aux points M et N pour lesquels

$$AM = \frac{p}{2m},$$

$$BN = mb + \frac{p}{2m}.$$

Si, d'ailleurs, on pose $AP = a$ et

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2}, \\ \beta &= \frac{BN}{2}, \\ \rho^2 &= (a-\alpha)^2 + \beta^2, \end{aligned}\right.$$

le cercle décrit sur NP comme diamètre aura pour équation

$$(4)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2,$$

et sera rencontré par la droite

$$(5)\qquad y = \frac{p}{2m}$$

en deux points dont les distances au point M sont les racines de l'équation

$$(x-\alpha)^2 + \left(\frac{p}{2m} - \beta\right)^2 = \rho^2,$$

obtenue en éliminant y entre (4) et (5).

Le produit de ces racines

$$\varpi = \alpha^2 + \left(\frac{p}{2m} - \beta\right)^2 - \rho^2$$

représente la puissance du point M, et devient, d'après les relations (3),

$$\varpi = ab - \frac{pb}{2} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note — La même question a été résolue par MM. Gambey, B. Launoy; Ley; A. Pellissier; A. Astor; Catala, a Gueret; H. Lemelle; C Le Paige, a Liege; E. de Lamaze, a Sorreze; Moret-Blanc; L. Goulin, eleve du lycee de Rouen.