S. REALIS

Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 424-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__424_1>

SIMPLES REMARQUES SUR LES RACINES ENTIÈRES DES ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. S. REALIS.

(Addition à un article précédent. *Voir* page 289.)

10. Il a été question plus haut (7) des formes exclusives auxquelles peut se réduire toute équation cubique à racines entières, selon qu'on classe ses coefficients sous tel ou tel système de formes linéaires. On parvient à des résultats plus précis en rapportant chaque coefficient à la forme qui lui est propre, d'après la loi d'homogénéité; en rapportant, dis-je, le nombre $-P$ à la forme quadratique, et le nombre Q à la forme cubique. Alors c'est la composition même des coefficients qui fait reconnaître la dépendance qui doit subsister entre eux.

Je dis, d'après cela, que la proposée

$$x^3 + Px + Q = 0$$

ne peut avoir trois racines entières si $-$P n'est pas représenté par la forme

$$3y^2+z^2,$$

et qu'elle les aura effectivement si, parmi les valeurs de y et z, propres à une telle présentation, il se trouve deux valeurs α, β, telles que l'on ait simultanément

$$-\mathrm{P}=3\alpha^2+\beta^2,$$
$$\mathrm{Q}=2\alpha(\alpha^2-\beta^2).$$

Pour le prouver, supposons les entiers α et β connus pour une équation donnée, en sorte que les deux égalités qui précèdent se trouvent vérifiées par identité. On obtiendra, par l'élimination, ces deux autres égalités

$$(-2\alpha)^3+\mathrm{P}(-2\alpha)+\mathrm{Q}=0,$$
$$(2\beta)^6+6\mathrm{P}(2\beta)^4+9\mathrm{P}^2(2\beta)^3+4\mathrm{P}^3+27\mathrm{Q}^2=0,$$

conséquences nécessaires des prémisses.

La première nous fait voir que -2α satisfait à la proposée, en sorte qu'on aura d'abord $x=-2\alpha$. Il résulte de la seconde que 2β et -2β sont racines de l'équation aux différences des racines de la proposée, d'où l'on voit que, parmi les valeurs absolues de ces différences, une au moins est un nombre entier. Mais il a été démontré (9) que ces mêmes différences s'expriment rationnellement l'une par l'autre, ce qui fait que, l'une étant rationnelle, toutes le sont. Les six racines de l'équation aux différences sont donc rationnelles, et partant entières; il devient manifeste par là que les racines x, dont l'une a la valeur entière -2α, ne peuvent être qu'entières toutes trois.

Les relations posées entre α, β, P, Q expriment donc des conditions suffisantes pour que la proposée ait ses trois racines entières; mais il est facile de voir que ces conditions sont, de plus, nécessaires. Quelles que soient, en effet, les racines entières a, b, c de la proposée, comme leur somme algébrique doit être nulle, l'une d'elles sera nécessairement paire, tandis que les deux autres seront paires ou impaires ensemble. On pourra donc toujours poser, en nombres entiers α, β, des égalités telles que

$$a = -2\alpha,$$
$$b = \alpha + \beta,$$
$$c = \alpha - \beta,$$

et de ces égalités résultent nécessairement les valeurs ci-dessus de $-P$ et de Q.

Du reste, ces expressions de a, b, c renferment en elles-mêmes la preuve complète que les corrélations de forme et de valeur, établies entre les coefficients, caractérisent effectivement toute équation, telle que la proposée, dont les trois racines sont entières. Si l'on a ajouté la considération des équations fournies par l'élimination ci-dessus de β et de α, c'est surtout dans le but de présenter, dès à présent, une application du théorème précédemment énoncé (9).

Ces caractères de la rationnalité des racines, disons-le tout de suite, ne résolvent pas la question qu'on doit se proposer sur le sujet. Ils n'offrent, en effet, aucun moyen pratique de les constater sur une équation numérique donnée, si ce n'est par des tâtonnements analogues à ceux qu'exigerait la recherche des racines entières elles-mêmes. Mais la considération de ces caractères n'en est pas moins utile, surtout en ce qu'il est facile de signaler d'avance des cas très-étendus où ils font défaut, et où l'existence de trois racines entières dans la proposée devient conséquemment impossible. C'est ainsi que, de ce que la valeur numérique de P doit être comprise dans la formule $3y^2 + z^2$, et en s'aidant des principes connus touchant les diviseurs de cette formule (*), on est conduit à conclure que : *Si le nombre* $-$P *est de la forme* $3p + 2$, *ou si, après avoir été dégagé de tout facteur carré, il est divisible par* 2, *ou par* 5, *ou par* 11, *ou par tout autre nombre de la forme indiquée, la proposée ne saurait avoir trois racines entières.* Cet énoncé reproduit avec plus d'étendue une proposition précédemment établie (6).