Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 40-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__40_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, t. I^{er}. — *Nouvelle Géométrie analytique, ou extension des méthodes de la Géométrie de Descartes à l'étude des lieux qui peuvent être représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.*

M. Maximilien Marie se propose de développer, dans un seul Ouvrage, une série de travaux déjà publiés par lui à diverses époques, mais que le lecteur ne saurait pas toujours se procurer facilement.

Le premier volume de cet Ouvrage vient de paraître : il contient le développement d'un nouveau système de Géométrie analytique, qui a surtout pour but l'interprétation des solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables. Dans ce système de Géométrie, une seule et même équation ne représente pas seulement une courbe réelle, mais une infinité d'autres courbes réelles, que l'on appelle les *conjuguées* de celle-ci, et qui ont une grande analogie de propriétés avec elle.

Sans entrer ici dans de grands détails, nous allons donner une idée de la théorie de M. Marie.

Considérons l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

et soit $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ une solution de cette équation ; nous la représenterons par le point dont les coordonnées réelles seraient

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + \beta, \\ y' &= \alpha' + \beta'. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on établit entre β et β' une relation $\beta' = \beta c$, c désignant une constante, on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha + \beta, \\ y' &= \alpha' + \beta c. \end{aligned} \right.$$

Or α, β, α' étant liés entre eux par les deux équations dans lesquelles se décompose

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}\right) = 0,$$

les équations (1) donneront x' et y' en fonction d'un seul des paramètres α, β, α'. Le lieu des points x', y', pour une valeur donnée de c, est ce que l'on appelle la *conjuguée* c du lieu $f(x, y) = 0$; c en est la caractéristique. La caractéristique de chaque conjuguée dépend du choix des axes, mais non la figure ni la position de cette conjuguée.

M. Marie montre que la quantité c est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre les abscisses x de la conjuguée c réelles.

Les conjuguées d'un lieu du premier degré à coefficients imaginaires sont des droites issues d'un même point.

Les conjuguées d'une ellipse sont les hyperboles ayant les mêmes diamètres conjugués que cette ellipse et touchant cette ellipse.

Lorsque l'on considère deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, les courbes réelles représentées par ces deux équations seront tangentes. Il en est de même des conjuguées de ces courbes réelles qui passent au point (x, y), lorsque ce point est imaginaire.

Si l'on remplace en particulier l'équation $\varphi = 0$ par

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

la droite représentée par cette équation sera tangente à $f = 0$, et si le point x, y est imaginaire, la conjuguée de cette droite qui y passera sera tangente à la conjuguée de même caractéristique de la courbe $f = 0$.

L'enveloppe des conjuguées d'une courbe donnée par l'équation $f(x, y) = 0$ comprend évidemment la courbe réelle représentée par cette équation ; mais cette courbe n'est pas la seule enveloppe des conjuguées en question. M. Marie trouve la seconde partie de l'enveloppe en exprimant que $\frac{dy}{dx}$ est réel; l'enveloppe imaginaire des conjuguées jouit de plusieurs propriétés intéressantes que nous ne pouvons pas énoncer dans un aperçu nécessairement succinct.

M. Marie étudie successivement la théorie des asymptotes, des centres et des diamètres, etc., dans les courbes et leurs conjuguées, et presque toujours les conjuguées semblent en quelque sorte compléter la courbe réelle; les propriétés des conjuguées rappellent celles des hyperboles tangentes à une même ellipse et possédant les mêmes diamètres conjugués.

Le Chapitre XI du livre de M. Marie est une introduction à la théorie de la courbure des lignes, on y étudie le lieu

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

et ses conjuguées; l'enveloppe de ces conjuguées est un cercle. La théorie de la courbure des lignes planes est étudiée dans le Chapitre suivant; on y remarque le théorème suivant :

La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée de cette courbe.

Le Chapitre XIV est consacré à l'étude des points singuliers des courbes planes.

Le Chapitre XV traite de la quadrature des courbes planes et de leurs conjuguées. En appelant θ l'angle des axes, la notation suivante, où les limites x_0, y_0 et x_1, y_1 se rapportent à deux points d'une même conjuguée,

$$\sin\theta \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} y\,dx,$$

représente, par sa partie imaginaire, l'aire comprise entre la conjuguée et le diamètre correspondant à ses cordes réelles, et, par sa partie réelle, l'aire comprise entre le diamètre, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes.

Parmi les résultats trouvés par M. Marie, on remarque le suivant :

L'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées est fourni par la même intégrale que l'arc de l'enveloppe réelle ou de la courbe proposée.

Nous bornons à ces considérations le compte rendu de l'Ouvrage de M. Marie; mais nous ajouterons, pour en donner une idée et inspirer au lecteur le désir d'en faire la lecture, que l'auteur étend toutes les considérations dont nous venons de parler à la Géométrie dans l'espace.

Ainsi, à toute surface on peut adjoindre une infinité de surfaces conjuguées dont l'étude est aussi simple que celle des conjuguées des courbes planes. H. LAURENT.

Histoire des Mathématiques depuis leur origine jusqu'au commencement du XIX^e *siècle*, par M. F. HOEFER, 1874. — Paris, Hachette. Un vol. de 600 pages, avec 42 figures dans le texte. Prix : 4 francs.

Le livre que nous annonçons fait partie de la collection intitulée *Histoire universelle*, publiée sous la direction de M. V. Duruy. On doit déjà à M. Hœfer une série d'ouvrages relatifs à l'histoire des sciences physiques, astronomiques et naturelles. L'*Histoire des Mathématiques* forme le complément de cette série importante.

L'auteur de cet Ouvrage a suivi dans ce travail une méthode excellente qui établit les quatre grandes périodes principales de l'évolution de la science :

1° Invention des nombres, des chiffres et des premiers éléments de l'Arithmétique et de la Géométrie.

C'est à ces seules notions, à part quelques faits particuliers, que se bornèrent les connaissances des peuples de l'Orient, Indous, Égyptiens, Chinois, etc.

2° Écoles grecques fondées par Thalès, Démocrite et Anaxagore, Pythagore et Platon. Écoles d'Alexandrie, fondées par Euclide, puis par Ptolémée.

Ces diverses Écoles poussèrent les sciences mathématiques fort loin, mais ne réussirent pas à dégager de loi générale.

3° Période de transition : développement de l'Algèbre pendant le moyen âge.

4° Temps modernes : invention et usage du Calcul infinitésimal, des séries et des fonctions.

L'Histoire générale des Mathématiques a toujours offert un grand intérêt. Elle a démontré combien ont été pénibles les efforts de l'esprit humain à dégager la vérité, à créer les méthodes de raisonnement et d'investigation, à généraliser les résultats en possession desquels il s'est trouvé peu à peu.

Le progrès dans ce genre de recherches a éprouvé des fluctuations bien singulières, liées intimement à l'histoire des peuples qui ont constitué la grande famille de l'humanité. En dehors des Grecs, par exemple, quel peuple nous a légué une plus abondante moisson de vérités mathématiques? C'est à ce peuple, à l'esprit si net, à l'intelligence si vive, que la science moderne est redevable de toutes ses méthodes les plus délicates. Les Arabes, dont on a vanté l'habileté, n'ont pas, à beaucoup près, contribué autant que les Grecs au progrès des Mathématiques. Ils ont eu principalement la gloire d'avoir traduit et commenté leurs ouvrages, mais les véritables géomètres arabes sont en bien petit nombre, et leur passage a été de bien courte durée.

Ces diverses particularités, M. Hœfer les a très-bien signalées dans les livres III et IV, dont l'importance n'échappera pas au lecteur. Il nous suffirait de mentionner ici les savants grecs qui ont attaché leur nom à divers théorèmes d'Analyse et de Géométrie bien connus; mais ce détail nous mènerait trop loin et nous forcerait à paraphraser l'exposé de l'auteur.

L'histoire des Mathématiques chez les Grecs est précédée de considérations sur les origines des Mathématiques, formant le Livre Ier de l'Ouvrage, et du Livre II consacré aux Mathématiques dans l'antiquité.

Le Livre V renferme l'historique de la période de transformation, qui embrasse tout le moyen âge, dont elle a gardé l'empreinte caractéristique. L'esprit humain, à cette époque, se livra aux combinaisons compliquées à plaisir. L'idée simple devait éprouver la plus grande difficulté à se dégager; des considérations astrologiques et mystiques servirent à envelopper la science, dont elles retardèrent longtemps encore le développement. Nous les retrouvons pour la dernière fois au XVIe siècle : elles ont servi de base aux immortels travaux de Kepler. Enfin cette même époque vit éclore aussi ces vaines recherches auxquelles donna lieu la quadrature du cercle, dont l'histoire a fait l'objet de nombreux développements dans le grand Ouvrage de Montucla, et dans un livre spécial que publia ce même auteur en 1754.

Le Livre VI et dernier est consacré à l'historique succinct des progrès des Mathématiques pendant les XVI[e], XVII[e] et XVIII[e] siècles. La question de l'origine et de la priorité du Calcul infinitésimal est soigneusement élucidée; l'auteur a dû, malheureusement, réduire son exposé aux faits les plus essentiels; il lui a fallu se renfermer dans les modestes limites d'un traité élémentaire, et qui, pour être spécial, exigerait plusieurs gros volumes, à en juger déjà d'après les recherches de Montucla et de de la Lande, qui s'arrêtent aussi au XIX[e] siècle, tandis que, depuis, de nouvelles méthodes ont été créées, qui ont produit les résultats les plus inattendus.

L'esprit de méthode et la concision dans l'exposé recommandent cet Ouvrage à toutes les personnes qui s'intéressent au progrès des Mathématiques. Les élèves des classes de Mathématiques spéciales, les candidats à la licence et à l'agrégation y trouveront des éléments utiles à leurs recherches et à leurs travaux; enfin ce livre sera lu aussi par les personnes qui n'ont pas fait des Mathématiques élevées l'objet de leurs études, l'auteur ayant écarté soigneusement les théories arides et les formules compliquées.

L'histoire complète des Mathématiques exigerait bien d'autres développements. Elle devrait comprendre la biographie des mathématiciens, le détail de leur correspondance avec les géomètres de leur temps, l'exposé de leurs méthodes et la critique de leurs ouvrages. Pour l'étude de plus d'une question, il faudrait consulter de nombreux documents, reproduire les originaux les plus importants, interpréter même les passages obscurs et difficiles. Tel n'a pas été le programme du travail de M. Hœfer. Il a été obligé de le restreindre à des proportions plus modestes, qui le rendent ainsi accessible à un plus grand nombre de lecteurs.

De nos jours où la science a été mise, pour ainsi dire, à la portée de tous, un ouvrage élémentaire, un exposé succinct, répond à un besoin réel et suffit grandement à combler une lacune. Tel est le cas de cet Ouvrage, qu'il faudra consulter lorsqu'on écrira l'histoire complète des Mathématiques, pour faire suite au grand Traité de Montucla, achevé et publié par de la Lande, et à l'Histoire de l'Astronomie par Delambre et par Bailly, ouvrages précieux par les exposés lucides et les documents originaux qu'ils renferment en si grand nombre.

L'*Histoire des Mathématiques* de M. Hœfer s'arrête, avons-nous dit, au commencement de notre siècle. Depuis cette époque, l'Analyse et la Géométrie se sont enrichies de méthodes et de théories toutes nouvelles, dont le principe date de nos jours. En Analyse, la théorie des fonctions elliptiques, les méthodes d'intégration; en Géométrie analytique, les coordonnées curvilignes, les propriétés des courbes gauches; en Géométrie, la théorie des surfaces, le principe de correspondance et ses nombreuses applications dans la voie féconde ouverte par M. Chasles et suivie par les géomètres contemporains : tels sont les principaux résultats acquis à la science depuis ces derniers temps.

Les progrès de la Géométrie et de l'Analyse en France ont fait l'objet de rapports présentés par M. Chasles et par M. Bertrand. Mais l'exposé historique des progrès accomplis à la fois en France et à l'étranger nécessitera de longues et savantes recherches, qui exigeront, de la part de celui qui les entreprendra, une connaissance approfondie des théories modernes, afin qu'il puisse établir, entre des méthodes si variées, la coordination qui existe entre elles, et qui représente le caractère philosophique de cette histoire des progrès de l'esprit humain.

H. Brocard.