NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Solution des questions de géométrie élémentaire proposées par M. Casimir Rey (voir même tome, p. 273)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 377-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__377_1>

SOLUTION DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉES PAR M. CASIMIR REY

(voir même tome, p. 273);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient deux cylindres de révolution de rayon r, dont les axes se rencontrent, et soit a la portion d'axe de l'un des cylindres interceptée par l'autre cylindre. On demande de prouver par la Géométrie élémentaire que :

1° *Le volume commun aux deux cylindres a pour mesure*

$$\frac{8}{3}ar^2; \tag{1}$$

2° *La surface de ce volume a pour mesure*

$$8ar; \tag{2}$$

3° *Deux plans parallèles aux axes interceptent une* *zone qui a pour mesure*

$$4ah.$$

REMARQUE I. — *Quand les axes sont perpendiculaires, les formules* (1) *et* (2) *prennent les valeurs remarquables*

$$\frac{2a^3}{3} \quad et \quad 4a^2.$$

REMARQUE II. — *Ces formules servent à mesurer les voussoirs et les douelles des voûtes en plein cintre et en arc de cloître droites ou biaises.*

La section du volume commun aux deux cylindres par le plan des axes est un losange ABCD dont le côté est égal à a, et la hauteur à $2r$; l'aire de cette section est donc

$$2ar.$$

L'intersection des deux surfaces cylindriques se projette sur le plan des axes, suivant les diagonales AC, BD, leur intersection O est la projection du point le plus élevé, en supposant le plan horizontal.

La section faite dans le volume commun par un plan parallèle au plan des axes, mené à la distance h, est un losange semblable au premier, ayant pour hauteur la corde d'intersection de la section droite de l'un des cylindres par le plan sécant.

Les losanges étant semblables, leurs aires sont entre elles comme les carrés des hauteurs; l'aire de la section est donc

$$2ar\frac{r^2-h^2}{r^2} = 2ar - 2ar\frac{h^2}{r^2}.$$

Or $2ar\frac{h^2}{r^2}$ est l'aire de la section qui serait faite dans une pyramide ayant pour base ABCD et pour hauteur r, par un plan parallèle à la base, mené à la distance h du sommet. Le volume compris entre les deux plans est donc la différence des volumes d'un prisme et d'une pyramide ayant pour hauteur h et pour bases respectivement $2ar$ et $2ar\,\frac{h^2}{r^2}$; ce volume a donc pour mesure

$$2arh - 2ar\,\frac{h^2}{r^2}\,\frac{h}{3} = \frac{2ah\,(3r^2 - h^2)}{3r}.$$

Si, dans cette formule, on fait $h = r$, on aura pour mesure du volume commun situé d'un côté du plan des axes

$$\frac{4}{3}\,ar^2,$$

mesure qu'on obtiendrait immédiatement en remarquant que ce volume est la différence d'un prisme et d'une pyramide ayant pour base ABCD et pour hauteur r. La mesure du volume commun tout entier est donc

$$\frac{8}{3}\,ar^2.$$

Ce volume peut être décomposé en pyramides ayant pour bases les éléments de surface et pour sommet le point O, et, par suite, r pour hauteur commune. On a donc

$$V = S\,\frac{r}{3},$$

d'où

$$S = \frac{3V}{r} = 8ar.$$

Si, du volume $\frac{2ah(3r^2 - h^2)}{3r}$, on retranche la pyramide qui a pour base $2ar\,\frac{r^2 - h^2}{r^2}$ et pour hauteur h, et dont la mesure est $\frac{2ah(r^2 - h^2)}{3r}$, le volume restant $\frac{4}{3}\,arh$ a pour mesure le produit de sa surface convexe par $\frac{r}{3}$, pour la même raison que plus haut; cette surface a donc pour mesure

$$4ah,$$

et il en est de même de la surface comprise entre deux plans parallèles au plan des axes, h étant la distance de ces deux plans.

On peut aussi trouver directement la mesure de la surface, et en déduire celle du volume par le raisonnement inverse.

En effet, soit a' le côté du losange, intersection du volume commun par un plan parallèle au plan des axes, mené à la distance h, $2c$ la corde d'intersection par ce plan de la section droite d'un des cylindres. Considérons l'élément de surface compris entre ce plan et le plan parallèle infiniment voisin. Soient d la distance des deux plans, et mn l'arc de circonférence de la section droite comprise entre eux. L'élément de surface a pour mesure

$$4a' \times mn.$$

Or

$$\frac{a'}{a} = \frac{c}{r} = \frac{d}{mn};$$

donc

$$4a' \times mn = 4ad.$$

C'est l'aire d'un rectangle ayant pour base $4a$ et pour hauteur d; il en résulte que l'aire comprise entre deux plans parallèles au plan des axes et distants de h a pour mesure

$$4ah,$$

et celle du volume commun tout entier

$$8ar,$$

d'où, pour l'expression de ce volume,

$$8ar\frac{r}{3} = \frac{8}{3}ar^2.$$

Quand les axes sont perpendiculaires, $a = 2r$; les formules (1) et (2) deviennent

$$V = \frac{2}{3}a^3, \quad S = 4a^2.$$

Note. — M. Ch.-Ph. Cahen, lieutenant au 1er régiment du Génie, à Versailles, nous adresse également une solution fort simple des questions précédentes, qu'il étend aux voûtes à sections elliptiques dont les intersections sont des courbes planes.