Nouvelles annales de mathématiques

Concours général de 1874

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 360-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__360_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874.

Mathématiques spéciales.

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$, satisfaisant aux relations

$$F(1-x) = F(x),$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m},$$

est

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q\big[A_0(x^2 - x + 1)^{3n}$$
$$+ A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2$$
$$+ A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}\big],$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes quelconques.

Mathématiques élémentaires.

Étant données les quatre arêtes AB, DA, BC, CD d'un tétraèdre, déterminer le tétraèdre de manière que son volume soit maximum. Le tétraèdre ainsi déterminé, calculer les deux autres arêtes BD et AC et le volume dans les deux cas suivants :

1° Lorsque deux arêtes opposées AB et CD sont égales, ainsi que les deux arêtes BC et AD ;

2° Lorsque les deux arêtes consécutives AB et BC sont égales, ainsi que les deux arêtes CD et DA.

Comparer les volumes en supposant que les deux arêtes AB et AD ont respectivement des longueurs égales dans les deux cas.

Philosophie.

Étant donnés un cercle de rayon R et deux rayons rectangulaires OA et OB, déterminer les côtés OC et OE d'un rectangle OCDE, inscrit dans le quart de cercle AOB, et tel que, si l'on fait tourner la figure autour du rayon OA, la surface totale du cylindre engendré soit égale à la surface d'une circonférence de rayon donné a.

Rhétorique.

I. On donne deux sphères tangentes extérieurement et dont l'une a un rayon double de celui de l'autre. A l'ensemble de ces deux sphères on circonscrit un tronc de cône, dont on demande le volume et la surface totale, connaissant le rayon de la petite sphère.

II. Distance du Soleil à la Terre. Rapport du volume du Soleil à celui de la Terre. Rapport des masses.

Seconde.

I. Étant donné un tétraèdre, on suppose que l'on mène par chaque arête un plan parallèle à l'arête opposée, et l'on demande : 1° quel sera le solide ainsi obtenu; 2° quel sera le rapport de son volume à celui du tétraèdre.

II. La différence de deux nombres est a, et la somme de leurs racines carrées est aussi égale à a; quels sont ces deux nombres?

Troisième.

I. On donne un cercle et deux points fixes A et B sur la circonférence; par ces deux points, on mène deux cordes égales de grandeur quelconque; trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.

II. Démontrer que, si la somme $3^n + 1$, dans laquelle n représente un nombre entier, est un multiple de 10, la somme $3^{n+1} + 1$ sera aussi un multiple de 10.

CONCOURS DES DÉPARTEMENTS.

Mathématiques spéciales.

Si l'on considère la fonction e^{-x^2} de la variable x et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnaît que la dérivée de l'ordre n est égale au produit de la fonction e^{-x^2} par un polynôme entier en x que l'on représentera par $\varphi_n(x)$:

1° Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes

$$\varphi_n(x) = 2x\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\varphi_{n-2}(x),$$
$$\varphi'_n(x) = -2n\varphi_{n-1}(x),$$
$$\varphi''_n(x) - 2x\varphi'_n(x) + 2n\varphi_n(x) = 0,$$

$\varphi'_n(x)$ désignant la dérivée première du polynôme $\varphi_n(x)$, et $\varphi''_n(x)$ la dérivée seconde ;

2° Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$, ordonné suivant les puissances de la variable x.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Mathématiques appliquées et Géométrie descriptive.

I. *Mécanique.* — Qu'appelle-t-on rendement d'une machine? Pourquoi le rendement est-il toujours inférieur à l'unité?

Une machine à vapeur met en jeu un système de pompes qui élèvent l'eau d'un fleuve à 155 mètres de hauteur pour l'alimentation d'une ville. On demande de calculer à $\frac{1}{100}$ près le rendement de ce système de pompes, en supposant : 1° que la force de la machine, mesurée sur l'arbre de couche, soit de 1500 chevaux-vapeur; 2° que les réservoirs de la ville reçoivent 30 000 mètres cubes d'eau en vingt-quatre heures.

II. *Géométrie descriptive.* — Construire les projections et la vraie grandeur de la section faite par un plan dans un prisme oblique. Le prisme a pour base un carré ABCD, de 5 centimètres de côté, situé sur le plan horizontal, et dont le côté AB, parallèle à la ligne de terre, est éloigné de cette ligne de 5 centimètres en avant du plan vertical. Pour définir la direction de ses arêtes latérales, on imagine un cube qui serait construit sur la base ABCD au-dessus du plan horizontal; les arêtes latérales du prisme sont parallèles à la diagonale de ce cube, qui a pour trace horizontale le point C.

Le plan sécant passe par la ligne de terre et divise en deux parties égales le dièdre formé par la partie antérieure du plan horizontal et par la partie supérieure du plan vertical.

Après avoir construit en vraie grandeur la section demandée, on mesurera ses angles et ses côtés, et l'on calculera sa surface. On donnera les résultats numériques ainsi obtenus.