B. NIEWENGLOWSKI

Note sur les centres de gravité des surfaces et des volumes de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 352-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__352_1>

NOTE SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES ET DES VOLUMES DE RÉVOLUTION;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soit AB une courbe plane quelconque; en tournant autour d'un axe z situé dans son plan, elle engendrera une surface de révolution. Supposons que le plan méridien ait tourné d'un angle α et proposons-nous de chercher le centre de gravité de la surface du fuseau ABA'B'.

Soient M un point de la courbe méridienne, $MP = x$ la distance à l'axe et N un point infiniment voisin de M. On peut prendre, pour éléments de la surface du fuseau, les surfaces telles que MN, M'N', engendrées par les éléments MN de la courbe méridienne, que nous représenterons par l'équation

$$x = f(z).$$

Si l'on désigne par A l'aire du fuseau; par ξ, η, ζ les coordonnées de son centre de gravité; par z_0 et z_1 les valeurs de z correspondant aux extrémités A et B de la courbe méridienne et par ds l'élément MN de cette courbe, on trouve sans peine

$$A = \alpha \int_{z_0}^{z_1} x\,ds, \quad A\zeta = \alpha \int_{z_0}^{z_1} xz\,ds,$$

$$A\xi = \sin\alpha \int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds, \quad A\eta = (1 - \cos\alpha) \int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds.$$

On déduit d'abord de ces formules que la valeur de ζ est indépendante de α, ce qui est évident *a priori;* ensuite, si l'on pose

$$B = \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds}{\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} x\,ds},$$

on a

$$\xi = B\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \eta = B\,\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}.$$

Si ρ désigne la distance du centre de gravité à l'axe et θ l'angle que fait, avec le plan méridien initial, celui qui contient le centre de gravité, on a

$$\tang\theta = \frac{\eta}{\xi} = \tang\frac{\alpha}{2}, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\alpha}{2},$$

et

$$\rho = B\,\frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{1}$$

Cherchons maintenant le centre de gravité du volume engendré par AB. Si l'on désigne ce volume par V et les coordonnées de son centre de gravité par ξ', η', ζ', on aura

$$V = \frac{\alpha}{2}\int_{z_0}^{z_1} x^2\,dz, \quad V\zeta' = \frac{\alpha}{2}\int_{z_0}^{z_1} x^2 z\,dz,$$

$$V\xi' = \frac{1}{2}\sin\alpha \int_{z_0}^{z_1} x^3\,dz, \quad V\eta' = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\int_{z_0}^{z_1} x^3\,dz.$$

Si l'on pose

$$C = \frac{\int_{z_0}^{z_1} x^3 dz}{\int_{z_0}^{z_1} x^2 dz},$$

on déduit la formule précédente

$$\xi' = C\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \eta' = C\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}.$$

Donc, si ρ' est la distance du centre de gravité à l'axe, θ' l'angle du plan méridien passant par le centre de gravité avec le plan méridien initial, on trouve, comme précédemment,

$$(2) \qquad \theta' = \frac{\alpha}{2} = \theta, \quad \rho' = C\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une courbe quelconque tourne autour d'un axe situé dans son plan, les centres de gravité du fuseau et du coin qu'elle engendre décrivent des courbes semblables, et ces courbes restent semblables à elles-mêmes quand on change la courbe méridienne.