NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VACHETTE

Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux, où trois lettres consécutives sont toujours distinctes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 337-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__337_0>

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, OU TROIS LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES

(voir même tome, p. 299);

PAR M. VACHETTE,

Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

VII. *Abaissement d'ordre du nombre* $N_q(r, u, o)$, *quand u n'est pas nul.*

L'espèce $N_q(r, u, o)$ contient $\frac{1}{2q}N_q(r, u, o)$ tournantes; si l'on commence une tournante par un des u intervalles S_4, on comptera $\frac{u}{2q}N_q(r, u, o)$ permutations.

Autour d'un S_4, $\underline{abab}$, que l'on enlève, il peut se produire :

1° Un S_4 ou un assemblage équivalent de quatre lettres

$$\left.\begin{array}{l}\underline{fefe}\\ \underline{feef}\end{array}\right\}\text{ par les formes }\left\{\begin{array}{l} fe\,abab\,fe\\ fe\,\underline{abab}\,ef;\end{array}\right.$$

l'assemblage $\underline{feef}$ équivaut à un S_4, car il n'existe plus de lettres pareilles à e et f dans le reste de la permutation;

2° Un S_3

$$efe\text{ par les formes réciproques }\left\{\begin{array}{l} e\,abab\,fe\\ ef\,\underline{abab}\,e;\end{array}\right.$$

3° Un assemblage irrégulier de trois lettres

$$\left.\begin{array}{c}\underline{cef}\\ \underline{fec}\end{array}\right\}\text{ par les formes réciproques }\left\{\begin{array}{l}e\ \underline{abab}\ ef\\ ef\ \underline{abab}\ e;\end{array}\right.$$

4° Aucun intervalle nouveau.

Dans le deuxième et le troisième cas, la lettre f ne fait plus partie d'aucun autre intervalle; car elle appartiendrait à un S_3 n'ayant point son complémentaire, ce qui est contraire à l'hypothèse $v = 0$.

Pour le premier, le deuxième et le quatrième cas, on enlève S_4 et l'on abaisse ainsi à l'ordre $q - 2$; le nombre de permutations relatives à a et b, ainsi compté, devra être multiplié par $q(q-1)$; car il y a $q(q-1)$ manières de faire un S_4 avec deux des q lettres distinctes.

Dans le premier cas, on obtient l'espèce $N_{q-2}(r, u, 0)$; un S_4 est remplacé par un autre. Chacune des tournantes de cette espèce, commencée par un des u intervalles S_4, fournit $2u$ permutations à l'espèce cherchée, si l'on place $\underline{ab\,ab}$ au milieu de cet S_4 dont on alterne ou non les deux dernières lettres. La part sera

$$\frac{2u}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u, 0).$$

Dans le deuxième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u-1, 1)$. Le nombre des S_4 a diminué de 1, et l'on a obtenu un nouvel S_3 sans son complémentaire. Chacune de ces tournantes, commencée par cet S_3, fournit deux permutations à l'espèce cherchée; car on peut placer $\underline{ab\,ab}$ de deux manières dans cet S_3. La part sera

$$\frac{2}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u-1, 1).$$

Dans le quatrième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u-1, 0)$;

le nombre des S_4 a diminué de 1. Il reste

$$2q - 4 - 4r - 3(u - 1)$$

lettres, ou isolées, ou initiales d'un des intervalles. Chacune des tournantes commencée par une de ces lettres fournit $2q - 4r - 3u - 1$ permutations à l'espèce cherchée, en plaçant $\underline{ab\,ab}$ devant cette lettre. La part sera

$$\frac{2q - 4r - 3u - 1}{2(q - 2)} N_{q-2}(r, u - 1, 0).$$

La somme de ces trois parts, multipliée par $q(q - 1)$, sera

$$\frac{q(q - 1)}{2(q - 2)}[2uN_{q-2}(r, u, 0) + 2N_{q-2}(r, u - 1, 1)$$
$$+ (2q - 4r - 3u - 1)N_{q-2}(r, u - 1, 0)].$$

Dans le troisième cas, celui des figures réciproques $e\,\underline{ab\,ab}\,ef$, $fe\,\underline{ab\,ab}\,e$, on enlève $e\,\underline{ab\,ab}\,e$, et l'on abaisse à l'ordre $q-3$; le nombre des permutations relatives aux trois lettres a, b, e, ainsi compté, devra être multiplié par $q(q-1)(q-2)$, car il y a $q(q-1)(q-2)$ manières de former une séquence $e\,\underline{ab\,ab}\,e$ avec trois des q lettres distinctes. Or on obtient ainsi, dans l'ordre $q - 3$, des espèces composées, quant aux intervalles, de la même manière que les permutations d'ordre $q-2$, fournies par une des deux figures du premier cas et par celles du deuxième et du quatrième cas. La part sera donc, en changeant q en $q - 1$ dans la somme précédente, multipliée par $q(q-1)(q-2)$ au lieu de $q(q-1)$, et en divisant par 2 le premier terme de la parenthèse, car, $e\,\underline{ab\,ab}\,e$ placé au milieu d'un S_4, $\underline{fg\,fg}$, ne devra donner que la seule figure $fge\,\underline{abab}\,efg$, et jamais la figure $gfe\,\underline{abab}\,efg$,

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{2(q-3)}\left[u\mathrm{N}_{q-3}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 1) \right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 0)\right].$$

Si l'on ajoute les deux sommes, on obtient

$$\frac{u}{2q}\mathrm{N}_q(r, u, 0);$$

divisant tout par $q(q-1)$, on a la formule $(r, u, 0)$

$$\frac{u}{2q^2(q-1)}\mathrm{N}_q(r, u, 0)$$
$$= \frac{1}{2(q-2)}\left[2u\mathrm{N}_{q-2}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-2}(r, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 1)\mathrm{N}_{q-2}(r, u-1, 0)\right]$$
$$+ \frac{q-2}{2(q-3)}\left[u\mathrm{N}_{q-3}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 0)\right].$$

VIII. *Cas particuliers de la formule précédente.*

Si l'on y fait $r = 0$, on obtient la formule $(0, u, 0)$

$$\frac{u}{2q^2(q-1)}\mathrm{N}_q(0, u, 0)$$
$$= \frac{1}{2(q-2)}\left[2u\mathrm{N}_{q-2}(0, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-2}(0, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 3u - 1)\mathrm{N}_{q-2}(0, u-1, 0)\right]$$
$$+ \frac{q-2}{2(q-3)}\left[2u\mathrm{N}_{q-3}(0, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 0)\right].$$

Elle en comprend deux autres, pour $u = 1$ et $u = 2$, relatives à deux des espèces que forment $\mathrm{C}_{q,2}$; ce sont les formules (0, 1, 0) et (0, 2, 0)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2q^2(q-1)} N_q(0,1,0) \\
&\quad = C_{q-2,2} + \frac{1}{q-2}[N_{q-2}(0,1,0) + N_{q-2}(0,0,1)] \\
&\qquad + (q-2)C_{q-3,2} + \frac{q-2}{2(q-3)}[N_{q-3}(0,1,0) + 2N_{q-3}(0,0,1)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q^2(q-1)} N_q(0,2,0) \\
&\quad = \frac{1}{q-2}\Big[2N_{q-2}(0,2,0) + N_{q-2}(0,1,1) \\
&\qquad\qquad + \frac{2q-7}{2} N_{q-2}(0,1,0)\Big] \\
&\quad + \frac{q-2}{q-3}\Big[N_{q-3}(0,2,0) + N_{q-3}(0,1,1) \\
&\qquad\qquad + \frac{2q-9}{2} N_{q-3}(0,1,0)\Big].
\end{aligned}$$

Remarques. — 1° La formule (0, 1, 0) ne peut s'appliquer qu'à partir de $q = 6$.

On trouve directement (IV), $N_2(0,1,0) = 2$.

Il n'y a ni $N_3(0,1,0)$, ni $N_4(0,1,0)$; car dans le premier cas $\underline{abab}$ entraîne $\underline{abab}\,cc$, et dans le deuxième cas $\underline{abab}\,\underline{cdcd}$.

Pour $N_5(0,1,0)$, il ne faut prendre dans la formule que le premier terme

$$\frac{1}{50.4} N_5(0,1,0) = C_{3,2} = P_3, \quad \text{d'où} \quad N_5(0,1,0) = 10P_5;$$

les autres termes de la formule n'existent point, à l'exception du terme $N_2(0,1,0)$ qui ne peut rien fournir; car si l'on place $e\,\underline{abab}\,e$ au milieu de $\underline{cdcd}$, on obtient $cde\,\underline{abab}\,ecd$ ou $e\,\underline{abab}\,e\;\underline{cdcd}$ de l'espèce $N_5(0,2,0)$. Ce résultat se vérifie directement; on a la seule variété asymétrique $\underline{abab}\,cdecde$; donc

$$N_5(0, 1, 0) = 1.2.5P_5.$$

2° La formule (0, 2, 0) ne peut aussi s'appliquer qu'à partir de $q = 6$. Il ne peut y avoir de permutations de cette espèce qu'à partir de $q = 4$.

Pour $q = 4$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec $\underline{efef}$ on peut placer $\underline{abab}$ de deux manières, soit avant un e, soit avant un f, pour obtenir deux S_4, tandis qu'en général on ne le place que d'une seule; en outre, la tournante $N_2(0, 1, 0)$ est incomplète et ne contient que deux permutations au lieu de quatre; il faut donc multiplier par 4 le résultat que donne la formule; or elle donne $\frac{1}{48}N_4(0, 2, 0) = \frac{1}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{1}{2}$, et l'on prendra $N_4(0, 2, 0) = 48.2 = 4P_4$ trouvé directement (IV).

Pour $q = 5$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec $\underline{efef}$ on peut placer $c\,\underline{abab}\,c$ de deux manières au lieu d'une, et l'autre raison subsiste encore : il faut multiplier par 4; or la formule donne

$$\frac{1}{100}N_5(0, 2, 0) = \frac{3}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{3}{2},$$

et l'on prendra $N_5(0, 2, 0) = 100.6 = 5P_5$. On le vérifie directement; il n'y a qu'une seule variété, symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{abab}\,e\,\underline{cdcd}\,e$; donc

$$N_5(0, 2, 0) = 1.2.5P_5.\tfrac{1}{2} = 5P_5.$$

Pour $q = 6$, on obtient

$$\frac{1}{36.5}N_6(0, 2, 0) = \tfrac{1}{4}.2N_4(0, 2, 0) = 2P_4,$$

d'où

$$N_6(0, 2, 0) = 12P_6.$$

On le vérifie, il ne peut exister que les deux variétés suivantes, symétriques de fraction $\frac{1}{2}$,

$$\underline{abab} \;\Big|\; \begin{matrix} cf \\ cf \end{matrix} \;\Big|\; \underline{cdcd} \;\Big|\; \begin{matrix} cf \\ fe \end{matrix} \;\Big|$$

et

$$N_6(0, 2, 0) = 2.2.6P_6.\tfrac{1}{2} = 12P_6.$$

IX. *Abaissement d'ordre du nombre* $N_q(r, 0, 0,)$; *cas particulier.*

L'espèce $N_q(r, 0, 0)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, 0, 0)$ tournantes, et si l'on commence une des tournantes par un des $2r$ intervalles S_3, on comptera $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$ permutations.

Si l'on enlève les extrêmes d'un des S_3, les deux a de $\underline{aba}$, autour de b, il peut se former un S_4, un S_3, ou rien :

$$\left.\begin{matrix} \overline{bcbc} \\ \underline{cbcb} \end{matrix}\right\} \text{ par les formes réciproques } \left\{\begin{matrix} aba\;cbc \\ \overline{cbc}\;\overline{aba} \end{matrix}\right. ;$$

$\underline{dbd}$ par la forme $d\underline{aba}d$ (et dans ce cas il existe un S_3 complémentaire de $\underline{dbd}$, $\underline{cbc}$ par exemple).

On multipliera par q le nombre de permutations ainsi compté relativement à a.

S'il se forme un S_4, on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 1, 0)$; le nombre des couples de S_3 complémentaires a diminué de 1, et il s'est formé un S_4. Chacune de ces tournantes, commencée par S_4, donne deux permutations à l'espèce cherchée si l'on entoure de deux a l'une des extrêmes de S_4. La part sera

$$\frac{2}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 1, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q-1} N_{q-1}(r-1, 1, 0).$$

S'il se forme un S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r, 0, 0)$; le S_3 enlevé est remplacé par un autre de même médiane.

Chacune de ces tournantes, commencée par un des $2r$ intervalles S_3, fournit $2r$ permutations à l'espèce cherchée; on entoure de deux a l'une des médianes de ces S_3. La part sera

$$\frac{2r}{2(q-1)} N_{q-1}(r, 0, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{r}{q-1} N_{q-1}(r, 0, 0);$$

sinon, on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 0, 1)$; le nombre des couples de $2S_3^c$ a diminué de 1, et il s'est formé un S_3 distinct. Chaque tournante, commencée par le S_3 distinct, fournit une permutation à l'espèce cherchée; on entoure de deux a la lettre b isolée, semblable à la médiane du S_3 distinct. La part sera

$$\frac{1}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 0, 1).$$

Si l'on ajoute les trois parts, et qu'on multiplie par q, on obtient $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$; multipliant par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule $(r, 0, 0)$

$$\frac{r(q-1)}{q^2} N_q(r, 0, 0) = N_{q-1}(r-1, 1, 0) + rN_{q-1}(r, 0, 0) + \tfrac{1}{2} N_{q-1}(r-1, 0, 1).$$

Cette formule, pour $r = 1$, comprend la formule $(1, 0, 0)$, relative à l'une des espèces qui forment $C_{q,2}$

$$\frac{q-1}{q^2} N_q(1, 0, 0) = N_{q-1}(0, 1, 0) + N_{q-1}(1, 0, 0) + \tfrac{1}{2} N_{q-1}(0, 0, 1).$$

Elle ne peut s'appliquer à $q = 3$, on a trouvé directement (IV)

$$N_3(1, 0, 0) = 3P_3 = 18.$$

Or elle donnerait

$$\tfrac{2}{9} N_3(1, 0, 0) = N_2(0, 1, 0) = 2, \quad \text{d'où} \quad N_3(0, 1, 0) = 9;$$

c'est que la tournante de $N_2(0, 1, 0)$, $\underline{ab\,ab}$ est incomplète à deux permutations au lieu de quatre; le résultat de la formule doit être multiplié par 2.

Pour $q = 4$, on trouve

$$\tfrac{3}{16} N_4(1, 0, 0) = N_3(1, 0, 0) = 3P_3,$$

d'où

$$N_4(1, 0, 0) = 4P_4 \text{ (IV)}.$$

X. *Calcul direct de* $N_{2\nu}(0, 0, \nu)$, $N_{2u}(0, u, 0)$ et $N_{3r}(r, 0, 0)$.

1° Une permutation de l'espèce $N_{2\nu}(0, 0, \nu)$ peut avoir, relativement à la médiane b de l'un des ν intervalles S_3, les quatre formes suivantes :

$$\underline{aba}\, f\, \underline{cdc}\, bd\, \underline{efe},$$
$$\underline{ba}\, f\, \underline{cdc}\, bd\, \underline{efe}\, \underline{a},$$
$$\underline{a}f\, \underline{cdc}\, bd\, \underline{efe}\, \underline{ab},$$
$$bd\, \underline{efe}\, \underline{aba}\, f\, \underline{cdc},$$

selon que l'intervalle $\underline{aba}$ est initial, ou coupé aux extrêmes, ou que la deuxième lettre b (semblable à la médiane) commence la permutation. Si l'on suppose chaque S_3 condensé en sa médiane, on obtient une $B_{\nu,2}$, (*voir* le premier article, I), car la lettre isolée b, séparée de la médiane b par deux lettres au moins dans la permutation primitive, en est séparée par une lettre au moins dans la permutation résultante.

Chacune de ces $B_{\nu,2}$ contient ν des 2ν lettres distinctes d'une $N_{2\nu}$; pour reproduire les $N_{2\nu}$, il faut entourer l'une des deux lettres d'un des ν couples de lettres d'une $B_{\nu,2}$ avec un des ν autres couples qui ont été éliminés; on peut le faire de deux manières pour chacun des $\nu - 1$ couples de la $B_{\nu,2}$ qui n'a point sa lettre en tête de la permutation et de quatre manières pour l'autre couple, eu égard aux quatre formes examinées plus haut; ainsi, avec l'un de arrangements d'espèce $A_{2\nu,\nu}$ des ν couples qui ferment, on obtient, pour une des $B_{\nu,2}$, $2^{\nu+1}$ permutations; pour tous les arrangements, on en a $2^{\nu+1} A_{2\nu,\nu}$, et pour toutes les $B_{\nu,2}$, on a la formule (2ν)

$$N_{2\nu}(0, 0, \nu) = 2^{\nu+1} A_{2\nu,\nu} B_{\nu,2}.$$

Si $\nu = 2$,

$$N_4(0, 0, 2) = 2^3 A_{4,2} B_{2,2} = 2^3 . 4 . 3 . 2 = 8 P_4,$$

comme on l'a vérifié (IV).

Si $\nu = 3$,

$$N_6(0, 0, 3) = 2^4 A_{6,3} B_{3,2} = 2^4 . 6 . 5 . 4 . 4 P_3 = 64 P_6.$$

2° Soit, pour $u = 5$, une des tournantes de l'espèce $N_{2u}(0, u, 0)$

$$\underline{abab}\ \underline{cdcd}\ \underline{efef}\ \underline{ghgh}\ \underline{ikik}.$$

Il n'y a que cette variété, symétrique de fraction $\frac{1}{u}$; donc $N_{2u}(0, u, 0) = \frac{1}{u} 4 u P_{2u}$, et l'on a la formule $(2u)$

$$N_{2u}(0, u, 0) = 4 P_{2u}$$

et, si $u = 3$,

$$N_6(0, 3, 0) = 4 P_6;$$

3° Soit, pour $r = 3$, une des tournantes de l'espèce $N_{3r}(r, 0, 0)$

$$\underline{aba}\ \underline{cec}\ \underline{ded}\ \underline{fhf}\ \underline{gbg}\ \underline{ihi}.$$

Si l'on condense chaque S_3 en une de ses lettres extrêmes, on obtient

$$acdfgi,$$

une des permutations de l'espèce $A_{3r,2r}$, ou l'un des arrangements de $3r$ lettres distinctes, prises $2r$ à $2r$.

Pour revenir des $A_{3r,2r}$ aux N_{3r}, il faut doubler chacune des $2r$ lettres distinctes d'une $A_{3r,2r}$ et intercaler une des r autres lettres distinctes entre chacun des binaires ainsi formés. Ces r lettres, rangées dans un des ordres possibles, forment une permutation d'espèce P_r : la première lettre de cette P_r occupant la première place vacante dans la permutation $A_{3r,2r}$ binarisée, sa semblable occupe une des $2r-1$ autres places; la deuxième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r-3$ autres places; la troisième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r-5$ autres places, et ainsi de suite : la dernière lettre distincte et sa semblable occupent les deux seules places restées vacantes. Pour chacune des $A_{3r,2r}$, on obtient

$$1.3.5\ldots(2r-1)P_r A_{3r,2r} = 1.3.5\ldots(2r-1)P_{3r};$$

mais, comme le premier intervalle qui commence la permutation peut la commencer par l'une de ses trois lettres, il faut multiplier par 3 le nombre précédent, et l'on a la formule $(3r)$

$$N_{3r}(r, 0, 0) = 3.1.3.5\ldots(2r-1)P_{3r},$$

Pour $r=1$.......... $N_3(1, 0, 0) = 3P_3$ (IV),

Pour $r=2$.......... $N_6(2, 0, 0) = 9P_6$.

XI. *Calculs depuis $q=5$ jusqu'à $q=7$.*

1° Décomposition des $B_{5,2}$, on a trouvé $B_{5,2} = 293\,P_5$.

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{5,2} = 68\,P_5$
$(0, 0, 1)$	$N_5(0, 0, 1) = 100$
$(0, 0, 2)$	$N_5(0, 0, 2) = 60$
$(0, 1, 0)$ (*voir* VIII)	$N_5(0, 1, 0) = 10$
$(0, 1, 1)$	$N_5(0, 1, 1) = 20$
$(0, 2, 0)$ (*voir* VIII)	$N_5(0, 2, 0) = 5$
$(1, 0, 0)$	$N_5(1, 0, 0) = 10$
$(r, 0, v)$ pour $r=1$, $v=1$ et $q=5$...	$N_5(1, 0, 1) = 10$
$(r, u, 0)$ pour $r=1$, $u=1$ et $q=5$...	$N_5(1, 1, 0) = 10$
On vérifie	$293\,P_5$

2° **Décomposition des $B_{6,2}$; on a trouvé $B_{6,2} = 3326\,P_6$.**

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{6,2} = 837\,P_6$
$(0, 0, 1)$	$N_6(0, 0, 1) = 1200$
$(0, 0, 2)$	$N_6(0, 0, 2) = 624$
$(2, v)$	$N_6(0, 0, 3) = 64$
$(0, 1, 0)$	$N_6(0, 1, 0) = 120$
$(0, 1, 1)$	$N_6(0, 1, 1) = 168$
$(0, u, v)$ pour $u = 1$, $v = 2$ et $q = 6$.	$N_6(0, 1, 2) = 48$
$(0, 2, 0)$	$N_6(0, 2, 0) = 12$
$(0, u, v)$ pour $u = 2$, $v = 1$ et $q = 6$..	$N_6(0, 2, 1) = 12$
$(2u)$	$N_6(0, 3, 0) = 4$
$(1, 0, 0)$	$N_6(1, 0, 0) = 84$
$(r, 0, v)$ pour $r = 1$, $v = 1$ et $q = 6$.	$N_6(1, 0, 1) = 108$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 1$ et $q = 6$...	$N_6(1, 1, 0) = 36$
$(3r)$	$N_6(2, 0, 0) = 9$
On vérifie.......	$3326\,P_6$

3° Décomposition des $B_{7,2}$; on a trouvé $B_{7,2} = 44189\,P_7$.

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{7,2} = 11863\,P_7$
$(0, 0, 1)$	$N_7(0, 0, 1) = 16198$
$(0, 0, 2)$	$N_7(0, 0, 2) = 8176$
$(0, 0, 3)$	$N_7(0, 0, 3) = 1400$
$(0, 1, 0)$	$N_7(0, 1, 0) = 1386$
$(0, 1, 1)$	$N_7(0, 1, 1) = 1764$
$(0, u, v)$ pour $u = 1$, $v = 2$ et $q = 7$...	$N_7(0, 1, 2) = 672$
$(0, 2, 0)$	$N_7(0, 2, 0) = 98$
$(0, u, v)$ pour $u = 2$, $v = 1$ et $q = 7$...	$N_7(0, 2, 1) = 126$
$(0, u, 0)$ pour $u = 3$ et $q = 7$........	$N_7(0, 3, 0) = 14$
$(1, 0, 0)$	$N_7(1, 0, 0) = 938$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1$, $v = 1$ et $q = 7$...	$N_7(1, 0, 1) = 1050$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1$ et $v = 2$.........	$N_7(1, 0, 2) = 168$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 1$ et $q = 7$...	$N_7(1, 1, 0) = 168$
(r, u, v) pour $r = 1$, $u = 1$, $v = 1$ et $q = 7$.	$N_7(1, 1, 1) = 84$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 2$ et $q = 7$...	$N_7(1, 2, 0) = 21$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 2$ et $q = 7$........	$N_7(2, 0, 0) = 63$
On vérifie	$44189\,P_7$