NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 277-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__277_2>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1155

(voir 2e série, t. XIV, p. 48);

PAR M. LAURANS,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon (classe de M. Ribout).

On donne la parabole semi-cubique

$$(1)\qquad x^3 - 3ay^2 = 0.$$

D'un point quelconque P *du plan on peut mener trois tangentes à la courbe* (1). *Désignons par* (C) *le cercle qui passe par les trois points de contact; chercher :*

1° *Le lieu des points* P *pour lesquels le cercle* C *a un rayon constant;*

2° *Le lieu des points* P *pour lesquels le centre du cercle* C *est constamment sur la courbe* (1);

3° *Le lieu des points* P *pour lesquels le cercle* C *touche la courbe* (1).

Soient α, β les coordonnées du point P; les points de contact des tangentes, menées du point (α, β) à la courbe, sont déterminées par l'équation (1), jointe à l'équation de la courbe polaire du point P, par rapport à la parabole (1), c'est-à-dire

$$(2) \qquad \alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2 = 0.$$

En éliminant y entre ces deux équations, on trouve une équation du cinquième degré en x, qui, suppression faite des racines $x^2 = 0$, provenant de ce que l'origine est un point double de la courbe, s'écrit

$$(3) \qquad x^3 - 6\alpha x^2 + 9\alpha^2 x - 12a\beta^2 = 0 \ (*).$$

Or, les coordonnées des trois points de contact satisfaisant à l'équation $x^3 - 3ay^2 = 0$, si dans l'équation (3) on remplace x^3 par $3ay^2$, on aura l'équation d'une courbe passant par ces trois points de contact; cette équation est, en divisant par 3,

$$(4) \qquad ay^2 - 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 4a\beta^2 = 0.$$

Les équations (2) et (4) représentent deux coniques, passant par les trois points de contact. Ces coniques ont leurs axes parallèles, puisque, dans chacune d'elles, les

(*) En supposant $a > 0$, pour qu'il soit possible de mener par le point P trois tangentes reelles a la parabole (1), il faut que l'equation (3) ait ses trois racines reelles et positives : ce qui exige qu'on ait $\alpha^3 - 3a\beta^2 > 0$.
(G.)

axes sont parallèles aux axes des coordonnées. On peut donc faire passer un cercle par leurs points d'intersection, et ce cercle sera précisément le cercle C, qui passe par les trois points de contact.

Il s'ensuit qu'on obtiendra l'équation de C en déterminant λ par la condition que l'équation

$$ay^2 - 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 4a\beta^2 + \lambda(\alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2) = 0,$$

représente un cercle, ce qui donne

$$a - \lambda a = -2\alpha + \lambda\alpha, \quad \lambda = \frac{a + 2\alpha}{a + \alpha},$$

d'où l'on déduit, pour l'équation du cercle C,

$$(5) \quad x^2 + y^2 - \frac{3\alpha}{a}(a + \alpha)x + \frac{2\beta}{\alpha}(a + 2\alpha)y + \frac{4\beta^2}{\alpha}(a + \alpha) = 0.$$

Cherchons maintenant les équations des divers lieux géométriques demandés :

1° *Lieu des points pour lesquels le cercle* (C) *a un rayon constant.*

Le carré du rayon de ce cercle ayant pour expression

$$R^2 = \frac{9\alpha^2}{4a^2}(a + \alpha)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}(a + 2\alpha)^2 - \frac{4\beta^2}{\alpha}(a + \alpha),$$

cette équation, entre α et β, est celle du lieu, en remplaçant α et β par x et y, et, résolvant par rapport à y^2, on obtient

$$(6) \qquad y^2 = \frac{x^2[4a^2R^2 - 9x^2(a + x)^2]}{4a^4},$$

équation du sixième degré. On voit immédiatement que les directions asymptotiques de la courbe, représentée par l'équation (6), sont imaginaires; cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, comme on devait s'y attendre. Sa forme dépendra des valeurs relatives de R et de a (*).

2° *Lieu des points pour lesquels le cercle* C *a son centre sur la courbe* (1).

Les coordonnées du centre de C étant

$$X = \frac{3\alpha}{2a}(a + \alpha), \quad Y = -\frac{6}{\alpha}(a + 2\alpha),$$

écrivons que ces coordonnées vérifient l'équation (1), nous aurons ainsi

$$\frac{27\alpha^3}{8a^3}(a + \alpha)^3 - 3a\frac{6^2}{\alpha^2}(a + 2\alpha)^2 = 0,$$

ou

$$y^2 = \frac{9x^5(a + x)^3}{8a^4(a + 2x)^2};$$

telle est l'équation du lieu. La courbe qu'elle représente est symétrique par rapport à l'axe des x. Pour toute valeur positive de x, l'ordonnée y a deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Pour des valeurs négatives de x, on doit avoir $x < -a$; de sorte que si l'on prend sur l'axe des x, à partir de l'origine O, dans le sens des x négatifs, une distance $OA = a$, et qu'on mène AA′ parallèle à OY, entre OY et AA′, il n'y aura aucun point de la courbe. L'origine et A sont deux points de rebroussement, la tangente de rebroussement est l'axe des x; les directions asymptotiques se confondent avec l'axe des y.

Note. — M. Laurans n'a pas traité le cas où le cercle C doit être tangent à la parabole (1).

(*) Dans une discussion assez etendue de l'équation (6), M. Laurans a distingué les trois cas $R < \frac{3a}{8}$, $R = \frac{3a}{8}$, $R > \frac{3a}{8}$, et montré quelle est dans chacun d'eux la forme de la courbe. Nous regrettons de devoir, faute d'espace, laisser au lecteur à faire cette discussion.

Question 1155

(voir 2e série, t. XIV, p. 48);

PAR M. MORET-BLANC.

1. Les coordonnées des points de contact des tangentes menées du point P (X, Y) à la courbe

$$(1)\qquad x^3 - 3ay^2 = 0$$

doivent satisfaire à la condition

$$(2)\qquad Xx^2 - 2aYy - ay^2 = 0;$$

d'où, en éliminant y,

$$(3)\qquad x^3 - 6Xx^2 + 9X^2x - 12aY^2 = 0,$$

équation qui détermine les abscisses des trois points de contact.

Soit

$$(4)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle (C), en la combinant avec les équations (1) et (2) pour éliminer y^2, on a

$$y = \frac{x^3 + 3ax^2 - 6a\alpha x + 3a(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{6a\beta},$$

et

$$y = \frac{(X+a)x^2 - 2a\alpha x + a(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{2a(Y+\beta)},$$

d'où

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(Y+\beta)x^3 - 3(\beta X - aY)x^2 - 6a\alpha Yx \\ &\qquad\qquad + 3aY(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (3) et (5) devant avoir les mêmes racines, il faut qu'on ait

$$(6)\qquad \frac{Y+\beta}{1} = \frac{\beta X - aY}{2X} = -\frac{2a\alpha Y}{3X^2} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 - R^2}{4Y}.$$

1° Des deux premières équations (6) on tire

$$\beta = -\frac{(2X+a)Y}{X}, \quad \alpha = \frac{3X(X+a)}{2a};$$

ces valeurs, substituées dans la troisième, donnent

$$(7) \qquad 9X^4(X+a)^2 - 4a^2R^2X^2 + 4a^4Y^2 = 0,$$

équation du lieu des points P, *pour lesquels le rayon du cercle* (C) *est constant et égal à* R.

2° Si l'on reporte ces valeurs de α et β dans l'équation (1), on obtient

$$(8) \qquad 9X^5(X+a)^3 - 8a^4(2X+a)^2Y^2 = 0,$$

équation du lieu des points P, *pour lesquels le centre du cercle* (C) *est sur la courbe* (1).

3° Le cercle (C) coupe la courbe (1) en six points (*), dont les abscisses sont déterminées par l'équation

$$(9)\left\{\begin{aligned} &x^6 + 6ax^5 + (9a^2 - 12a\alpha)x^4 \\ &\quad + 6a(\alpha^2 - \beta^2 - 6a\alpha - R^2)x^3 \\ &\quad + 18a^2(3\alpha^2 + \beta^2 - R^2)x^2 - 36a^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)x \\ &\qquad\qquad + 9a^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation admet les trois racines de l'équation (3); son premier membre est divisible par celui de l'équation (3), et le quotient

$$(10) \quad x^3 + 6(X+a)x^2 + 9(X+a)^2x - \frac{12.a(X+a)^2Y^2}{X^2} = 0$$

donnera les trois autres racines.

Pour que le cercle (C) touche la courbe (1), il faut que l'une des équations (3) et (10) ait des racines égales, ou qu'elles aient une racine commune.

(*) Parmi ces six points, il y en a au plus quatre qui soient réels.
(G.)

La première condition donne $X^3 - 3aY^2 = 0$, en supprimant la solution $Y = 0$ qui donne bien pour x deux valeurs égales, mais non deux points coïncidents.

Le lieu est la courbe proposée (1), ce qu'il était facile de prévoir.

La seconde condition donne

$$(11) \qquad X^2(X+a) + 3aY^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (X+a) = 0.$$

En éliminant x entre les équations (3) et (10), on obtient la troisième condition

$$(12) \quad 9X^3(x+a)(2X+a)^2 - 2a^4Y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad 2X + a = 0 \ (^*).$$

Les équations (1), (11) et (12) représentent les *lieux des points* P *pour lesquels le cercle* (C) *est tangent à la courbe* (1) (**).

2. En appliquant la même méthode à la courbe

$$(1) \qquad x^3 - 3ay = 0,$$

on obtient successivement

$$(2) \qquad Xx^2 - aY - 2ay = 0,$$

$$(3) \qquad 2x^3 - 3Xx^2 + 3aY = 0,$$

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0,$$

et par l'élimination de y entre (1) et (4)

$$(5) \quad x^6 - 6a\beta x^3 + 9a^2x^2 - 18a^2\alpha x + 9a^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$$

(*) Lorsque $2X + a = 0$, les équations (3) et (10) ont les mêmes racines. Le premier membre de l'équation (9) est le carré du premier membre de l'équation (3); il en résulte que l'équation (9) a trois racines *doubles;* deux de ces racines sont imaginaires, la troisième est réelle. (G.)

(**) C'est-à-dire *pour lesquels* l'équation (9) a des racines égales; resterait à considérer les valeurs correspondantes de l'ordonnée y, particulièrement dans le cas où l'on suppose $2X + a = 0$. (G.)

dont le premier membre doit être divisible par celui de l'équation (3), ce qui donne les conditions

$$(6)\quad \begin{cases} 9X^4 - 8aXY + 16a^2 - 16a\beta X = 0, \\ 16a\alpha + 3X^2Y = 0, \\ 16a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \beta Y - R^2) - 9aX^3Y + 4a^2Y^2 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$\alpha = -\frac{3X^2Y}{16a}, \quad \beta = \frac{9X^4 - 8aXY + 16a^2}{16aX}$$

et

$$(7)\ 9X^4(X^2Y^2 - 16aXY + 9X^4 + 32a^2) - 256(R^2X^2 - a^2) = 0,$$

équation du *lieu des points* P *pour lesquels le cercle* (C) *a un rayon constant.*

En substituant les valeurs de α et β dans $\alpha^3 - 3a\beta = 0$, on a

$$(8)\qquad 256a^3(9X^4 - 8aXY + 16a^2) - 9X^7Y^7 = 0,$$

équation du lieu des points P *pour lesquels le centre du cercle* (C) *est sur la courbe* (1).

En égalant à zéro le quotient de (5) par (3), on trouve

$$(10)\qquad 4Xx^3 + 6X^2x^2 + 9X\cdot x + 6aXY - 24a^2 = 0.$$

La condition pour que l'équation (3) ait deux racines égales est $X^3 - 3aY = 0$, ou $Y = 0$; cette dernière solution est admissible, car l'origine est un point d'inflexion, et l'axe des X est une tangente double.

La condition pour que l'équation (10) ait des racines égales est

$$(X^4 - 4aXY + 16a^2)(11X^4 - 12aXY + 48a^2) + 16X^8 = 0.$$

En éliminant x entre les équations (3) et (10), on obtient la condition pour qu'elles aient une racine commune

$$72aX^4(XY-6a)^2-(27X^4+16aXY-32a^2)$$
$$(8aX^2Y^2+9X^5Y-32a^2XY+32a^3)=0.$$

Les deux dernières équations, avec $X^3-3aY=0$, $Y=0$, représentent le lieu du point P pour lequel le cercle (C) touche la courbe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pierre Mondat, professeur au collége d'Annecy; B. Launoy; Gambey.

Question 1165

(voir 2e série, t. XIV, p. 192);

PAR M. H. LEMELLE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

La différence des carrés des distances de deux points de l'axe d'une parabole, également distants du foyer, à une tangente quelconque est constante.

(H. BROCARD.)

Soient M et M′ deux points de l'axe d'une parabole, pris à la même distance (a) du foyer F; CD une tangente quelconque, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe de la courbe; MN, M′N′, FF′ les perpendiculaires abaissées des points M, M′, F sur la tangente; on a

$$FF' = \frac{M'N' + MN}{2};$$

et si l'on mène la droite MR parallèle à CD, et rencontrant M′N′ en un point R, on aura

$$RM' = M'N' - MN.$$

Or le point F′ est sur la tangente AF′ menée au sommet A de la parabole; il en résulte que

$$FF' = \frac{p}{2\sin\alpha}; \quad \text{d'où} \quad M'N' + MN = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

D'autre part

$$\mathrm{RM'} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M'N'} - \mathrm{MN} = \mathrm{MM'}\sin\alpha = 2a\sin\alpha;$$

donc

$$(\mathrm{M'N'} + \mathrm{MN})(\mathrm{M'N'} - \mathrm{MN}) = (\mathrm{M'N'}^2 - \mathrm{MN}^2) = 2ap = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Henri Jacob, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon; Gambey; Launoy; Moreau; Lez; Chadu; S. F., de Cherbourg; B. V. Střastny et Y. Šebesta, élèves à l'École Polytechnique bohême, à Prague; A. Michel; H. Garreta; Louis Goulin, elèves du Lycée de Rouen; Scordeur, maître auxiliaire au Lycee de Lille; A. Tourrettes; Vladimir Habbe, à Odessa; Vandaine, de l'École Sainte-Geneviève.

Question 1166

(voir 2e série, t. XIV, p 192),

PAR M. C. CHADU.

Trouver à l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC *un point* O *tel, que les angles* OAB, OBC, OCA *soient égaux.* (H. BROCARD.)

On voit immédiatement que ce point se trouve à l'intersection de trois segments capables des suppléments des angles C, A, B, et décrits sur les côtés a, b, c.

En décrivant sur les côtés a, b, c des segments capables des suppléments des angles B, C, A, on trouverait un second point O′ pour lequel on aurait

$$\widehat{\mathrm{O'AC}} = \widehat{\mathrm{O'CB}} = \widehat{\mathrm{O'BA}}.$$

Considérons le point O, désignons par α la valeur commune des angles OAB, OBC, OCA, et calculons $\tan g\alpha$.

Les triangles AOB, AOC donnent respectivement

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin(\mathrm{B}-\alpha)} = \frac{c}{\sin\mathrm{B}}, \quad \frac{\mathrm{OA}}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\mathrm{A}};$$

par suite

$$b \sin\alpha \sin B = c \sin A \sin(B - \alpha),$$

$$\operatorname{tang}\alpha(b \sin B + c \sin A \cos B) = c \sin A \sin B.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $2a$, et remplaçons les produits

$$a \sin B, \quad ac \sin B, \quad 2ac \cos B$$

par leurs valeurs respectives

$$b \sin A, \quad 2S, \quad a^2 + c^2 - b^2.$$

Nous aurons, en divisant de part et d'autre par $\sin A$,

$$\operatorname{tang}\alpha(a^2 + b^2 + c^2) = 4S.$$

En tenant compte de la relation

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

$$\sin\alpha = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \frac{2S}{m},$$

en posant

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = m^2.$$

Nous aurons donc

$$OA = \frac{b^2c}{m}, \quad OB = \frac{c^2a}{m}, \quad OC = \frac{a^2b}{m}.$$

D'où l'on déduit les deux formules suivantes :

$$\frac{\overline{OA}^2}{b^2} + \frac{\overline{OB}^2}{c^2} + \frac{\overline{OC}^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{\text{tr.}(AOB)}{b^2c^2} = \frac{\text{tr.}(BOC)}{c^2a^2} = \frac{\text{tr.}(COA)}{a^2b^2} = \frac{S}{m^2}.$$

On trouverait des formules analogues pour le point O', par exemple,

$$O'A = \frac{bc^2}{m}, \quad O'B = \frac{ca^2}{m}, \quad O'C = \frac{ab^2}{m},$$

par suite

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{b}{c}, \quad \frac{OB}{O'B} = \frac{c}{a}, \quad \frac{OC}{O'C} = \frac{a}{b},$$

et

$$OA.OB.OC = O'A.O'B.O'C.$$

Note. — Solutions de MM. Morel; Lez; Etienne Gatti, etudiant à l'Universite de Turin; Moreau; F. S., de Cherbourg; Gambey; S. Kober, eleve a l'École Polytechnique bohème, a Prague; Jacob, eleve du Lycee de Dijon; Tourrettes; Launoy; H. Garreta et Louis Goulin, elèves du Lycee de Rouen; Vasselin, eleve en Mathematiques elementaires au Lycee du Havre; Vladimir Habbe, a Odessa; L.-P. de Cuerne, a Liege; L. Michel; Vandaine, de l'Ecole Sainte-Genevieve.