Questions proposées par le P. Pepin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 275-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__275_1>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR LE P. PEPIN.

1. *Théorème.* — Si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, l'un des deux produits

$ab(a^2 - b^2)$, $(a^2 - 2b^2)(a^2 - 4b^2)$ est toujours divisible par 7, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ est de l'une des formes $7l$, $7l + 1$, $7l + 2$, $7l + 4$, et le second, si cette somme est de l'une des formes $7l + 3$, $7l + 5$, $7l + 6$.

2. *Théorème.* — Soient a et b deux nombres entiers quelconques : l'un des deux produits

$$ab(a^2 - 3b^2)(a^2 - 4b^2) \quad \text{ou} \quad (a^2 - b^2)(a^2 - 5b^2)(a^2 - 9b^2)$$

est toujours divisible par 11, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ est de l'une des formes

$$11l + (0, 1, 3, 4, 5, 9),$$

et le second, si cette somme est de l'une des formes

$$11l + (2, 6, 7, 8, 10).$$

3. *Théorème.* — Soient $a, b, c, \ldots$ des facteurs premiers inégaux, $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ et $\varphi(n)$ la fonction numérique qui exprime combien dans la suite $1, 2, 3, \ldots, n$ il y a de nombres premiers relativement à n. Cette fonction $\varphi(n)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :

$$m = \varphi(m) + \sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right) + \sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta}\right)$$
$$+ \sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma}\right) + \ldots + \alpha^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots$$

Soit, par exemple, $m = 3^2 5^2$, on a

$$3^2 5^2 = 225 = \varphi(225) + 5\varphi(9) + 3\varphi(25) + 15.$$

Legendre a démontré qu'aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube. On peut énoncer le théorème suivant plus général :

« Aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube multiplié par une puissance entière quelconque d'un nombre premier de l'une des deux formes $18m+5$, $18m+11$, ni par un cube multiplié par une puissance de 2, ou par le double d'un nombre premier $18m+11$, ou encore par le double du carré d'un nombre premier $18m+5$. »