NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. NIEWENGLOWSKI

# Problème. Trouver la plus petite corde d'une ellipse, qui soit normale à l'une de ses extrémités

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 14 (1875), p. 270-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__270_0>

# PROBLÈME.

## Trouver la plus petite corde d'une ellipse, qui soit normale à l'une de ses extrémités;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Reims.

Ce problème a été traité par M. Ossian Bonnet (*Nouvelles Annales*, t. II, 1re série, p. 421) et par M. Desbove (*Questions d'Algèbre*, p. 376). Voici une solution qui n'exige aucun artifice de calcul.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y = mx + n$$

les équations d'une ellipse et d'une sécante. En désignant par $l$ la longueur de la corde déterminée par cette droite, on a

$$l^2 = (x' - x'')^2(1 + m^2),$$

$x'$ et $x''$ étant les abscisses des extrémités de la corde. L'équation qui donne $x'$ et $x''$ étant de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$l^2 = (p^2 - 4q)(1 + m^2).$$

En remplaçant $p$ et $q$ par leurs valeurs, on trouve

$$l^2 = 4a^2b^2\frac{(a^2m^2 + b^2 - n^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Si maintenant on remplace $n^2$ par $\frac{c^4m^2}{a^2 + b^2m^2}$, la corde sera normale, et sa longueur sera donnée par l'équation

$$l^2 = 4a^4b^4\frac{(1 + m^2)^3}{(a^2 + b^2m^2)(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Il suffit, pour étudier les variations de $l^2$, de faire croître $m^2$ de o à $+\infty$. En posant $m^2 = z$, il suffit de considérer la fonction

$$u = (1+z)^3 (a^2 + b^2 z)^{-1} (a^2 z + b^2)^{-2},$$

dont la dérivée est, toutes réductions faites,

$$u' = \frac{c^2(1+z)^2}{(a^2+b^2 z)^2 (a^2 z + b^2)^3} \left[ (a^2 - 2b^2) z - (2a^2 - b^2) \right].$$

On a donc deux cas à distinguer :

1° $$a^2 - 2b^2 \leqq 0 \quad \text{ou} \quad a \leqq b\sqrt{2}.$$

La valeur de $z$ étant toujours positive, on a constamment $u' < 0$; donc la corde normale va en décroissant depuis $2a$ jusqu'à $2b$;

2° $$a > b\sqrt{2}.$$

La dérivée $u'$ s'annule pour $z = \dfrac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}$ (valeur admissible puisqu'elle est positive), et en s'annulant passe du négatif au positif. Donc, le point de contact se mouvant sur l'ellipse, du sommet A au sommet B, la corde normale part de la valeur $2a$, arrive à une valeur minima égale à $3\sqrt{3}\,\dfrac{a^2 b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ et croît de nouveau jusqu'à $2b$.